Objetivo del proyecto (Herrera Yañez, Maximenko, ???)

Proponer una construcción general
que permita diagonalizar algunas clases de operadores
en algunos espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

El proyecto está fuertemente basado en trabajos de Vasilevski, Hutník, . . . ,
y en estudios conjuntos con Ramos Vázquez y Leal Pacheco.

Nuestra construcción abarca los siguientes casos:

Los operadores verticales, es decir, los operadores que conmutan con los operadores de desplazamiento horizontal

$$(U_h f)(z) := f(z-h) \qquad (h \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{H}),$$

en los siguientes espacios:

- los espacios de Bergman sobre $\mathbb{H}$, sin peso (Vasilevski) y con peso (Grudsky, Karapetyants, Vasilevski),
- los espacios de Bergman armónicos sobre $\mathbb{H}$ (Loaiza, Lozano),
- los espacios de ondículas y el caso puro poli-analítico (Hutník).

Nuestra construcción abarca los siguientes casos:

Los operadores verticales, es decir, los operadores que conmutan con los operadores de desplazamiento horizontal

$$(U_h f)(z) := f(z - h) \qquad (h \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{H}),$$

en los siguientes espacios:

- los espacios de Bergman sobre $\mathbb{H}$, sin peso (Vasilevski) y con peso (Grudsky, Karapetyants, Vasilevski),
- los espacios de Bergman armónicos sobre $\mathbb{H}$ (Loaiza, Lozano),
- los espacios de ondículas y el caso puro poli-analítico (Hutník).

Por verificar:

- el caso multi-dimensional (cuasi-parabólico), estudiado por Quiroga-Barranco y Vasilevski.

Nuestra construcción abarca los siguientes casos:

Los operadores radiales, es decir, los operadores que conmutan con los operadores de rotación

$$(U_\alpha f)(z) := f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} z),$$

en los siguientes espacios:

- los espacios de Bergman sobre $\mathbb{D}$,
- el espacio de Fock sobre $\mathbb{C}$,
- los espacios de Bergman y de Fock de funciones armónicas.

Nuestra construcción abarca los siguientes casos:

Los operadores radiales, es decir, los operadores que conmutan con los operadores de rotación

$$(U_\alpha f)(z) := f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} z),$$

en los siguientes espacios:

- los espacios de Bergman sobre $\mathbb{D}$,
- el espacio de Fock sobre $\mathbb{C}$,
- los espacios de Bergman y de Fock de funciones armónicas.

Falta verificar bien:

- los espacios de Bergman “puros” de funciones poli-analíticas,
- el caso radial multi-dimensional,
- el caso separadamente radial (cuasi-elíptico),
- el caso del espacio proyectivo (Quiroga-Barranco, Sánchez-Nungaray).

Repaso de herramientas auxiliares:

Diagonalización de los operadores que actúan en L^2 sobre grupos abelianos localmente compactos y son invariantes bajo traslaciones

Expositor: Egor Maximenko
(todos los resultados de esta plática son bien conocidos)

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Seminario: Teoría de operadores de Toeplitz
CINVESTAV del IPN
Marzo del 2017

1. Álgebras $\mathbb{C}^n$ y $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$
2. Operadores de multiplicación
3. Grupos abelianos localmente compactos
4. Operadores invariantes bajo traslaciones

Álgebra $\mathbb{C}^n$

Consideramos el conjunto $\mathbb{C}^n$ con las operaciones lineales comunes y con la multiplicación por componentes:

$$a \odot b := \left[a_j b_j\right]_{j=0}^{n-1}.$$

$\mathbb{C}^n$ es una álgebra compleja asociativa y conmutativa con identidad

Álgebra $\mathbb{C}^n$

Consideramos el conjunto $\mathbb{C}^n$ con las operaciones lineales comunes y con la multiplicación por componentes:

$$a \odot b := \left[a_j b_j\right]_{j=0}^{n-1}.$$

$\mathbb{C}^n$ es una álgebra compleja asociativa y conmutativa con identidad

$$1_n := \left[\, 1 \,\right]_{j=0}^{n-1}.$$

Dotamos el álgebra $\mathbb{C}^n$ de la involución

$$a^* := \left[\overline{a_j}\right]_{j=0}^{n-1}$$

y de la norma–máximo:

$$\|a\| := \max_{0 \le j < n} |a_j|.$$

Entonces $\mathbb{C}^n$ se convierte en una álgebra C^*.

Propiedades de elementos de $\mathbb{C}^n$

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces:

- a es invertible $\iff$

Propiedades de elementos de $\mathbb{C}^n$

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces:

- a es invertible $\iff$ $\forall j \in [\![0, n[\![\quad a_j \neq 0$.

- $\operatorname{sp}(a) =$

Propiedades de elementos de $\mathbb{C}^n$

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces:

- a es invertible $\quad\Longleftrightarrow\quad \forall j \in [\![0, n[\![\quad a_j \neq 0$.
- $\operatorname{sp}(a) = \left\{ a_j\colon\ j \in [\![0, n[\![\right\}$.

Propiedades de elementos de $\mathbb{C}^n$

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces:

- a es invertible $\iff$ $\forall j \in [\![0, n[\![\quad a_j \neq 0$.
- $\operatorname{sp}(a) = \left\{ a_j \colon\ j \in [\![0, n[\![\right\}$.

Ejercicio (describir los divisores de cero del álgebra $\mathbb{C}^n$)

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces $\quad \exists b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \quad ab = 0_n \quad \iff \quad ???$

Propiedades de elementos de $\mathbb{C}^n$

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces:

- a es invertible $\iff$ $\forall j \in [\![0, n[\![\quad a_j \neq 0$.
- $\operatorname{sp}(a) = \left\{ a_j : \; j \in [\![0, n[\![\right\}$.

Ejercicio (describir los divisores de cero del álgebra $\mathbb{C}^n$)

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces $\exists b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \quad ab = 0_n \iff$???

Ejercicio (describir los generadores del álgebra $\mathbb{C}^n$)

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces $\operatorname{Alg}(a, 1) = \mathbb{C}^n \iff$???

Generalizaciones naturales del álgebra $\mathbb{C}^n$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C}^n \arrow[ddl] \arrow[ddr] & & \\
c_0(\mathbb{N}) \arrow[dr] & & & & \ell^\infty(\mathbb{N}) \arrow[dl] \\
 & C_0(T) \arrow[dr] & & L^\infty(X) \arrow[dl] & \\
 & & \text{álgebra } \mathrm{C}^* \text{ conmut.} & &
\end{tikzcd}$$

Funciones medibles esencialmente acotadas

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que μ es σ-finita.

Dada una función $\mathcal{F}$-medible $a\colon X \to \mathbb{C}$, se define su rango esencial

$$\mathcal{R}(a) \coloneqq \Big\{ \lambda \in \mathbb{C}\colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu\{x \in X\colon\ |a(x) - \lambda| < \varepsilon\} > 0 \Big\},$$

y su seminorma de supremo esencial

$$\|a\|_\infty \coloneqq \operatorname{ínf}\Big\{ c \in [0, +\infty]\colon \quad \mu\{x \in X\colon\ |a(x)| > c\} = 0 \Big\}.$$

Si $\|a\|_\infty < +\infty$, entonces se dice que a es esencialmente acotada. Notamos que

$$\|a\|_\infty = \sup \mathcal{R}(|a|).$$

Álgebra $L^\infty(X)$

$J :=$ el conjunto de las funciones $\mathcal{F}$-medibles $a\colon X \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|a\|_\infty = 0.$$

Funciones μ-medibles:

$$a \sim b \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad a - b \in J \quad \iff \quad \mu\Big\{x \in X\colon\ a(x) \neq b(x)\Big\} = 0.$$

J es un ideal cerrado del álgebra de las funciones μ-medibles esencialmente acotadas $X \to \mathbb{C}$.

El álgebra cociente se denota por $L^\infty(X)$.
Se puede demostrar que $L^\infty(X)$ es una álgebra C^*.

Propiedades de elementos de $L^\infty(X)$

Notamos que si $a \sim b$, entonces $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(b)$.
Por eso podemos definir $\mathcal{R}$ para cada clase de equivalencia:

$$\mathcal{R}(a + J) \coloneqq \mathcal{R}(a).$$

Sea $a \in L^\infty(X)$. Entonces

$$a \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow$$

Propiedades de elementos de $L^\infty(X)$

Notamos que si $a \sim b$, entonces $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(b)$.
Por eso podemos definir $\mathcal{R}$ para cada clase de equivalencia:

$$\mathcal{R}(a + J) \coloneqq \mathcal{R}(a).$$

Sea $a \in L^\infty(X)$. Entonces

$$a \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \mathcal{R}(a),$$

$$\mathrm{sp}(a) =$$

Propiedades de elementos de $L^\infty(X)$

Notamos que si $a \sim b$, entonces $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(b)$.
Por eso podemos definir $\mathcal{R}$ para cada clase de equivalencia:

$$\mathcal{R}(a + J) := \mathcal{R}(a).$$

Sea $a \in L^\infty(X)$. Entonces

$$a \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \mathcal{R}(a),$$

$$\operatorname{sp}(a) = \mathcal{R}(a).$$

Álgebra C^* de matrices cuadradas

Denotamos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ al conjunto de las matrices complejas $n \times n$, con las operaciones usuales y con la norma de operadores:

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_2 \leq 1}} \|Ax\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Entonces $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una álgebra C^* con identidad I_n.

Verifiquemos la desigualdad $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$:

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*Ax\| \, \|x\| \leq \|A^*A\| \, \|x\|^2.$$

Matrices diagonales

Para cada a en $\mathbb{C}^n$, denotemos por $\operatorname{diag}(a)$ a la siguiente matriz:

$$\operatorname{diag}(a) := \left[a_j \delta_{j,k}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Por ejemplo, si $a \in \mathbb{C}^3$, entonces

$$\operatorname{diag}(a) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Pongamos $\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) := \{\operatorname{diag}(a) \colon\ a \in \mathbb{C}^n\}$. Entonces

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ es una subálgebra C^* conmutativa de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\operatorname{diag} \colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ es un isomorfismo isométrico de álgebras C^*.
- $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \qquad \forall j,k \in [\![0,n[\![\quad (j \neq k) \implies (A_{j,k} = 0).$

Propiedades de las matrices diagonales

(es fácil verificarlas usando el isomorfismo isométrico $\mathrm{diag}\colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$)

Sea $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Entonces:

- $\|A\| =$

Propiedades de las matrices diagonales

(es fácil verificarlas usando el isomorfismo isométrico $\operatorname{diag}\colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$)

Sea $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Entonces:

- $\|A\| = \max\limits_{0 \le j < n} |A_{j,j}|$.
- A es invertible $\quad \Longleftrightarrow$

Propiedades de las matrices diagonales

(es fácil verificarlas usando el isomorfismo isométrico $\operatorname{diag}\colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$)

Sea $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Entonces:

- $\|A\| = \max\limits_{0 \le j < n} |A_{j,j}|$.
- A es invertible $\quad\Longleftrightarrow\quad \forall j \in [\![0, n[\![\quad A_{j,j} \neq 0$.
- $\operatorname{sp}(A) =$

Propiedades de las matrices diagonales

(es fácil verificarlas usando el isomorfismo isométrico $\operatorname{diag}\colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$)

Sea $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Entonces:

- $\|A\| = \max\limits_{0\le j<n} |A_{j,j}|$.
- A es invertible $\iff$ $\forall j \in [\![0, n[\![\quad A_{j,j} \neq 0$.
- $\operatorname{sp}(A) = \Big\{A_{j,j}\colon \quad j \in [\![0, n[\![\Big\}$.
- $\exists B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n\times n}\} \quad AB = 0_{n\times n} \iff$???.
- $\operatorname{Alg}(A, I_n) = \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \iff$???.

Operadores de multiplicación en $L^2(X)$

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.
Suponemos que μ es σ-finita.

Dada $a \in L^\infty(X)$, definimos $M_a \in \mathcal{B}(L^2(X))$,

$$M_a f := af.$$

Fórmula para la norma del operador de multiplicación:

$$\|M_a\| = \|a\|_\infty$$

Fórmula para el producto de operadores de multiplicación:

$$M_{ab} = M_a M_b.$$

Álgebra de operadores de multiplicación

Denotemos por $\mathcal{M}$ al conjunto de todos los operadores de multiplicación:

$$\mathcal{M} := \{M_a : \; a \in L^\infty(X)\}.$$

Entonces $\mathcal{M}$ es una subálgebra C^* conmutativa de $\mathcal{B}(L^2(X))$,
y la función $a \mapsto M_a$ es un isomorfismo isométrico.

Sea $a \in L^\infty(X)$. Entonces:

- M_a es invertible $\quad \Longleftrightarrow \quad$???
- $\mathrm{sp}(M_a) =$???.

Criterio del operador de multiplicación

Proposición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y σ-compacto, μ una medida de Radon sobre X, y $S \in \mathcal{B}(L^2(X))$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $S \in \mathcal{M}$,

(2) *para cada* b *en* $C_b(X)$, $SM_b = M_bS$.

Criterio del operador de multiplicación

Proposición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y σ-compacto, μ una medida de Radon sobre X, y $S \in \mathcal{B}(L^2(X))$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $S \in \mathcal{M}$,

(2) *para cada b en $C_b(X)$, $SM_b = M_bS$.*

Demostración (2)⇒(1) en el caso $\mu(X) < +\infty$:

$$a :=$$

Criterio del operador de multiplicación

Proposición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y σ-compacto, μ una medida de Radon sobre X, y $S \in \mathcal{B}(L^2(X))$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $S \in \mathcal{M}$,

(2) *para cada b en $C_b(X)$, $SM_b = M_bS$.*

Demostración (2)⇒(1) en el caso $\mu(X) < +\infty$:

$$a := S\,1_X.$$

Entonces para cada f en $L^2(X) \cap C_b(X)$

$$S\,f =$$

Criterio del operador de multiplicación

Proposición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y σ-compacto, μ una medida de Radon sobre X, y $S \in \mathcal{B}(L^2(X))$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $S \in \mathcal{M}$,

(2) *para cada b en $C_b(X)$, $SM_b = M_bS$.*

Demostración (2)$\Rightarrow$(1) en el caso $\mu(X) < +\infty$:

$$a := S\,1_X.$$

Entonces para cada f en $L^2(X) \cap C_b(X)$

$$S\,f = SM_f\,1_X =$$

Criterio del operador de multiplicación

Proposición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y σ-compacto, μ una medida de Radon sobre X, y $S \in \mathcal{B}(L^2(X))$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $S \in \mathcal{M}$,

(2) *para cada b en $C_b(X)$, $SM_b = M_bS$.*

Demostración (2)⇒(1) en el caso $\mu(X) < +\infty$:

$$a := S\,1_X.$$

Entonces para cada f en $L^2(X) \cap C_b(X)$

$$S\,f = SM_f\,1_X = M_fS\,1_X =$$

Criterio del operador de multiplicación

Proposición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y σ-compacto, μ una medida de Radon sobre X, y $S \in \mathcal{B}(L^2(X))$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $S \in \mathcal{M}$,

(2) *para cada b en $C_b(X)$, $SM_b = M_b S$.*

Demostración (2)$\Rightarrow$(1) en el caso $\mu(X) < +\infty$:

$$a := S\,1_X.$$

Entonces para cada f en $L^2(X) \cap C_b(X)$

$$S\,f = SM_f\,1_X = M_f S\,1_X = M_f\,a =$$

Criterio del operador de multiplicación

Proposición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y σ-compacto, μ una medida de Radon sobre X, y $S \in \mathcal{B}(L^2(X))$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $S \in \mathcal{M}$,

(2) *para cada b en $C_b(X)$, $SM_b = M_b S$.*

Demostración (2)$\Rightarrow$(1) en el caso $\mu(X) < +\infty$:

$$a := S\,1_X.$$

Entonces para cada f en $L^2(X) \cap C_b(X)$

$$S\,f = SM_f\,1_X = M_f S\,1_X = M_f\,a = fa =$$

Criterio del operador de multiplicación

Proposición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y σ-compacto, μ una medida de Radon sobre X, y $S \in \mathcal{B}(L^2(X))$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $S \in \mathcal{M}$,

(2) *para cada b en $C_b(X)$, $SM_b = M_b S$.*

Demostración (2)⇒(1) en el caso $\mu(X) < +\infty$:

$$a \coloneqq S\,1_X.$$

Entonces para cada f en $L^2(X) \cap C_b(X)$

$$S\,f = SM_f\,1_X = M_f\,S\,1_X = M_f\,a = fa = M_a\,f.$$

El subconjunto $L^2(X) \cap C_b(X)$ es denso en $L^2(X)$, por eso $S = M_a$.

Intento de demostración en el caso general

Como X es σ-compacto, podemos encontrar ??? una partición de la unidad $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que los soportes de φ_k son compactos.

Pongamos

$$b_k := S\varphi_k, \qquad a = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k.$$

Entonces para cada f en $L^2(X) \cap C_b(X)$

$$S\, f\, \varphi_k = SM_f\, \varphi_k = M_f S\, \varphi_k = M_f\, b_k = fb_k.$$

Luego se puede ??? demostrar que

$$S\, f = a\, f = M_a\, f.$$

El subconjunto $L^2(X) \cap C_b(X)$ es denso en $L^2(X)$, por eso $S = M_a$.

Grupo abeliano localmente compacto

Sea G un grupo abeliano (usamos la notación aditiva)
y al mismo tiempo un espacio de Hausdorff localmente compacto.
Supongamos que son continuas las operaciones del grupo:

$$(x, y) \mapsto x + y, \qquad x \mapsto -x.$$

Entonces G se llama GALC.
Además, nosotros siempre suponemos que G es σ-compacto.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.
- $\mathbb{T}_n = \{z \in \mathbb{C}\colon\ z^n = 1\} \simeq \mathbb{Z}_n$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.
- $\mathbb{T}_n = \{z \in \mathbb{C}:\ z^n = 1\} \simeq \mathbb{Z}_n$.
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| = 1\}$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.
- $\mathbb{T}_n = \{z \in \mathbb{C}:\ \ z^n = 1\} \simeq \mathbb{Z}_n$.
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}:\ \ |z| = 1\}$.
- $\mathbb{R}$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.
- $\mathbb{T}_n = \{z \in \mathbb{C}: \ z^n = 1\} \simeq \mathbb{Z}_n$.
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.
- $\mathbb{T}_n = \{z \in \mathbb{C}\colon\ z^n = 1\} \simeq \mathbb{Z}_n$.
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$.
- $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{T}$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.
- $\mathbb{T}_n = \{z \in \mathbb{C}:\ \ z^n = 1\} \simeq \mathbb{Z}_n$.
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}:\ \ |z| = 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$.
- $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{T}$.
- $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_n^p \times \mathbb{T}^q \times \mathbb{R}^r$.

Caracteres

Un caracter del grupo G es un homomorfismo $G \to \mathbb{T}$.
Denotemos el conjunto de estos caracteres por $\widehat{G}$.
Definimos en $\widehat{G}$ la operación binaria

$$(\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

entonces $\widehat{G}$ se convierte en un grupo abeliano.

Caracteres

Un caracter del grupo G es un homomorfismo $G \to \mathbb{T}$.
Denotemos el conjunto de estos caracteres por $\widehat{G}$.
Definimos en $\widehat{G}$ la operación binaria

$$(\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

entonces $\widehat{G}$ se convierte en un grupo abeliano.

Definimos en $\widehat{G}$ la topología compacto-abierta.
Su base forman los conjuntos

$$V_{K,U} \coloneqq \{\varphi \in \widehat{G} \colon \ \varphi(K) \subseteq U\},$$

donde K es compacto de G, U es abierto de $\mathbb{T}$.

Se puede demostrar que $\widehat{G}$ es un GALC.

Ejemplos de GALC con sus duales

- $G = \mathbb{Z}$. $\Phi\colon \mathbb{T} \to \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\Phi(t)(k) := t^k \qquad (t \in \mathbb{T},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplos de GALC con sus duales

- $G = \mathbb{Z}$. $\Phi\colon \mathbb{T} \to \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\Phi(t)(k) := t^k \qquad (t \in \mathbb{T},\ k \in \mathbb{Z}).$$

- $G = \mathbb{Z}$. $\Phi\colon \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\Phi(\theta + 2\pi\mathbb{Z})(k) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta} \qquad (\theta \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplos de GALC con sus duales

- $G = \mathbb{Z}$. $\Phi\colon \mathbb{T} \to \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\Phi(t)(k) := t^k \qquad (t \in \mathbb{T},\ k \in \mathbb{Z}).$$

- $G = \mathbb{Z}$. $\Phi\colon \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\Phi(\theta + 2\pi\mathbb{Z})(k) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta} \qquad (\theta \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

- $G = \mathbb{Z}$. $\Phi\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\Phi(\alpha + \mathbb{Z})(k) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,k\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Resumen: $\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Ejemplos de GALC y sus duales

Pongamos $\omega_n := \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}}$,

$$\mathbb{T}_n := \{z \in \mathbb{C}:\ \ z^n = 1\} = \{\omega_n^k:\ \ k \in [\![0, n[\![\}.$$

- $G = \mathbb{Z}_n$. $\Phi\colon \mathbb{T}_n \to \widehat{\mathbb{Z}_n}$,

$$\Phi(z)(k + n\mathbb{Z}) := z^k \qquad (z \in \mathbb{T}_n,\ \ k \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplos de GALC y sus duales

Pongamos $\omega_n := \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}}$,

$$\mathbb{T}_n := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \ z^n = 1\} = \{\omega_n^k\colon\ \ k \in [\![0, n[\![\}.$$

- $G = \mathbb{Z}_n$. $\Phi\colon \mathbb{T}_n \to \widehat{\mathbb{Z}_n}$,

$$\Phi(z)(k + n\mathbb{Z}) := z^k \qquad (z \in \mathbb{T}_n,\ k \in \mathbb{Z}).$$

- $G = \mathbb{Z}_n$. $\Phi\colon \mathbb{Z}_n \to \widehat{\mathbb{Z}_n}$,

$$\Phi(j + n\mathbb{Z})(k + n\mathbb{Z}) := \omega_n^{jk}.$$

Ejemplos de GALC y sus duales

Pongamos $\omega_n := \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}}$,

$$\mathbb{T}_n := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \ z^n = 1\} = \{\omega_n^k\colon\ \ k \in [\![0, n[\![\}.$$

- $G = \mathbb{Z}_n$. $\Phi\colon \mathbb{T}_n \to \widehat{\mathbb{Z}_n}$,

$$\Phi(z)(k + n\mathbb{Z}) := z^k \qquad (z \in \mathbb{T}_n,\ \ k \in \mathbb{Z}).$$

- $G = \mathbb{Z}_n$. $\Phi\colon \mathbb{Z}_n \to \widehat{\mathbb{Z}_n}$,

$$\Phi(j + n\mathbb{Z})(k + n\mathbb{Z}) := \omega_n^{jk}.$$

Resumen: $\widehat{\mathbb{Z}_n} \simeq \mathbb{T}_n \simeq \mathbb{Z}_n$.

Ejemplos de GALC y sus duales

- $G = \mathbb{R}$. $\Phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,
$$\Phi(y)(x) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, xy}\,.$$

Ejemplos de GALC y sus duales

- $G = \mathbb{R}$. $\Phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,
$$\Phi(y)(x) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\,.$$
- $G = \mathbb{R}$. $\Phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,
$$\Phi(y)(x) := \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xy}\,.$$

Ejemplos de GALC y sus duales

- $G = \mathbb{R}$. $\Phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,
$$\Phi(y)(x) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\,.$$
- $G = \mathbb{R}$. $\Phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,
$$\Phi(y)(x) := \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xy}\,.$$
- $G = \mathbb{T}$. $\Phi\colon \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{T}}$,
$$\Phi(k)(t) = t^k.$$

Ejemplos de GALC y sus duales

- $G = \mathbb{R}$. $\Phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,
$$\Phi(y)(x) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\,.$$
- $G = \mathbb{R}$. $\Phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,
$$\Phi(y)(x) := \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xy}\,.$$
- $G = \mathbb{T}$. $\Phi\colon \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{T}}$,
$$\Phi(k)(t) = t^k.$$

Resumen: $\widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}$.

Teorema de dualidad de Pontryagin

en el caso general demostrado por Egbert van Kampen y André Weil

$$\widehat{\widehat{G}} \simeq G.$$

Notación para el grupo dual y los caracteres

Fijamos algún grupo dual de G, y lo denotamos por $\widehat{G}$.
Usamos la notación aditiva para $\widehat{G}$.
Fijamos algún isomorfismo Φ de $\widehat{G}$ al grupo dual verdadero de G.
Pongamos

$$E(x,t) \coloneqq \Phi(t)(x) \qquad (x \in G,\ t \in \widehat{G}).$$

En otras palabras, $E(\cdot,t)$ es el caracter que corresponde a t. Notamos que

$$\begin{aligned}
&E\colon G \times \widehat{G} \to \mathbb{T},\\
&E(x_1 + x_2, t) = E(x_1,t)E(x_2,t),\\
&E(x, t_1 + t_2) = E(x,t_1)E(x,t_2).
\end{aligned}$$

Ejemplos de GALC y sus duales, con la notación E

- $G = \mathbb{R}$, $\widehat{G} = \mathbb{R}$, $E(x, y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, xy}$.

Ejemplos de GALC y sus duales, con la notación E

- $G = \mathbb{R}$, $\widehat{G} = \mathbb{R}$, $E(x, y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}$.
- $G = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $\widehat{G} = \mathbb{Z}$, $E(\theta, k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\theta}$.

Ejemplos de GALC y sus duales, con la notación E

- $G = \mathbb{R}$, $\widehat{G} = \mathbb{R}$, $E(x, y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, xy}$.
- $G = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $\widehat{G} = \mathbb{Z}$, $E(\theta, k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k\theta}$.
- $G = \mathbb{T}$, $\widehat{G} = \mathbb{Z}$, $E(t, k) = t^{-k}$.

Ejemplos de GALC y sus duales, con la notación E

- $G = \mathbb{R}$, $\widehat{G} = \mathbb{R}$, $E(x, y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, xy}$.
- $G = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $\widehat{G} = \mathbb{Z}$, $E(\theta, k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k\theta}$.
- $G = \mathbb{T}$, $\widehat{G} = \mathbb{Z}$, $E(t, k) = t^{-k}$.
- $G = \mathbb{Z}$, $\widehat{G} = \mathbb{T}$, $E(k, t) = t^{k}$.

Cerradura del álgebra generada por los caracteres

Para cada x en G, definimos $E_x \in C_b(\widehat{G})$, $E_x(t) \coloneqq E(x,t)$.

Notamos que $\quad E_x E_y = E_{x+y}, \quad E_0 = 1_{\widehat{G}}, \quad E_x^* = E_{-x}$.

Denotemos por $\mathcal{E}$ al subálgebra de $C_b(\widehat{G})$, generada
(en el sentido algebraico) por el conjunto de todos los caracteres:

$$\mathcal{E} \coloneqq \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k E_{x_k} : \; m \in \mathbb{N},\; x_1, \ldots, x_m \in G,\; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

La cerradura de $\mathcal{E}$ en $C_b(\widehat{G})$ se denota por $\mathrm{AP}(\widehat{G})$.
Los elementos de $\mathrm{AP}(\widehat{G})$ son funciones casi periódicas.
No las vamos a usar.

Cerradura del álgebra generada por los caracteres: consideramos las restricciones sobre un compacto

Proposición

Sea K un compacto en $\widehat{G}$. Pongamos

$$\mathcal{E}_K := \{f|_K : \ f \in \mathcal{E}\}.$$

Entonces $\mathcal{E}_K$ es una subálgebra de $C(K)$ densa en $C(K)$.

Demostración. $\mathcal{E}_K$ es una subálgebra de $C(K)$,

Cerradura del álgebra generada por los caracteres: consideramos las restricciones sobre un compacto

Proposición

Sea K un compacto en $\widehat{G}$. Pongamos

$$\mathcal{E}_K := \{f|_K : \ f \in \mathcal{E}\}.$$

Entonces $\mathcal{E}_K$ es una subálgebra de $C(K)$ densa en $C(K)$.

Demostración. $\mathcal{E}_K$ es una subálgebra de $C(K)$,
es cerrada bajo la involución,

Cerradura del álgebra generada por los caracteres: consideramos las restricciones sobre un compacto

Proposición

Sea K un compacto en $\widehat{G}$. Pongamos

$$\mathcal{E}_K := \{f|_K : \ f \in \mathcal{E}\}.$$

Entonces $\mathcal{E}_K$ es una subálgebra de $C(K)$ densa en $C(K)$.

Demostración. $\mathcal{E}_K$ es una subálgebra de $C(K)$,
es cerrada bajo la involución, y distingue los puntos de K.
Por el teorema de Stone–Weierstrass, $\mathcal{E}_K$ es densa en $C(K)$.

Medida de Haar

Una medida de Haar ν en G es una medida de Radon en G que es no nula e invariante bajo las traslaciones:

$$\nu(x+Y)=\nu(Y).$$

En otras palabras, ν tiene la siguiente propiedad:

$$\int_G f(x-a)\,d\nu(x)=\int_G f(y)\,d\nu(y).$$

Se sabe que la medida de Haar existe y es única salvo múltiplos constantes.

Convenio estándar:

- Si G es discreto, entonces ν es la medida de conteo.
- Si G es compacto, entonces $\nu(G)=1$.

Ejemplos de medida de Haar

- $G = \mathbb{Z}$. Para cada subconjunto A de $\mathbb{Z}$,

$$\nu(A) := \#A.$$

Ejemplos de medida de Haar

- $G = \mathbb{Z}$. Para cada subconjunto A de $\mathbb{Z}$,

$$\nu(A) := \#A.$$

- $G = \mathbb{T}$. Para cada subconjunto boreliano A de $\mathbb{T}$,

$$\nu(A) := \frac{1}{2\pi}\Big\{\theta \in [0, 2\pi) : \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in A\Big\}.$$

Ejemplos de medida de Haar

- $G = \mathbb{Z}$. Para cada subconjunto A de $\mathbb{Z}$,

$$\nu(A) := \#A.$$

- $G = \mathbb{T}$. Para cada subconjunto boreliano A de $\mathbb{T}$,

$$\nu(A) := \frac{1}{2\pi}\Big\{\theta \in [0, 2\pi) : \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in A\Big\}.$$

- $G = \mathbb{R}$. $\nu :=$ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Transformada de Fourier

Para cada f en $L^1(G)$,

$$(Ff)(t) := \int_G f(x)E(x,t)\,d\nu(x) \qquad (t \in \widehat{G}).$$

Se puede elegir una medida de Haar $\widehat{\nu}$ en $\widehat{G}$ tal que
para cada f en $L^1(G) \cap L^2(G)$,

$$\|Ff\|_{L^2(\widehat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}.$$

Siempre suponemos que $\widehat{\nu}$ está elegida de esta manera.
Entonces F se extiende a un isomorfismo isométrico $L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$.

El álgebra de los operadores que conmutan con los operadores de multiplicación por caracteres

Para cada x en G, M_{E_x} es el operador de multiplicación por E_x.
M_{E_x} actúa en $L^2(\widehat{G})$ mediante la regla

$$(M_{E_x} f)(t) = E(x,t) f(t).$$

Denotemos por $\mathcal{N}$ al conjunto de los operadores que conmutan con las multiplicaciones por caracteres:

$$\mathcal{N} := \{S \in \mathcal{B}(L^2(\widehat{G})) : \quad \forall x \in G \quad S\, M_{E_x} = M_{E_x}\, S\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{N}$ es una subálgebra C^* de $\mathcal{B}(L^2(\widehat{G}))$.

Teorema

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}.$$

Esquema de demostración

Sea $S \in \mathcal{N}$. Entonces $SM_a = M_aS$ para cada a en $\mathcal{E}$.
Queremos demostrar que $SM_b = M_bS$ para cada b en $C_b(\widehat{G})$.
Sea $b \in C_b(\widehat{G})$.

Tenemos que demostrar que para cualesquiera f, g en $L^2(\widehat{G})$,

$$\langle (SM_b - M_bS)f, g\rangle = 0.$$

Como $SM_b - M_bS$ es un operador lineal acotado,
es suficiente considerar el caso cuando f, g son de soporte compacto.

Supongamos que f, g se anulan fuera de un compacto K.
En el compacto K aproximamos b por elementos de $\mathcal{E}$.
Obtenemos la igualdad requerida.

Traslaciones

Dado a en G, definimos $V_a \colon L^2(G) \to L^2(G)$,

$$(V_a f)(x) \coloneqq f(x-a) \qquad (x \in G,\ f \in L^2(G)).$$

Ejemplo. $G = \mathbb{Z}_5$,

$$V_{3+5\mathbb{Z}} = C(e_3^{(5)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El álgebra de los operadores invariantes bajo traslaciones

$$\mathcal{A} := \left\{ S \in \mathcal{B}(L^2(G)) : \quad \forall a \in G \quad SV_a = V_a S \right\}.$$

Ejercicio

Mostrar que $V_b \in \mathcal{A}$ para cada b en G.

Ejercicio

Demostrar que $\mathcal{A}$ es una subálgebra C^* de $\mathcal{B}(L^2(G))$.

Ejercicio

Demostrar que $\mathcal{A}$ es una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{B}(L^2(G))$ y por lo tanto una álgebra W^*.

Operadores de convolución

Sea $g \in L^1(G)$. Definimos $\operatorname{Convol}_g \colon L^2(G) \to L^2(G)$,

$$((\operatorname{Convol}_g)f)(x) = (g * f)(x) = \int_G g(x-y)f(y)\,d\nu(y).$$

Por la desigualdad de Young, $\|\operatorname{Convol}_g\| \leq \|g\|_1$.

Proposición

Sea $g \in L^1(G)$. Entonces $\operatorname{Convol}_g \in \mathcal{A}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(V_a \operatorname{Convol}_g f)(x) &= (g * f)(x-a) = \int_G g(x-a-y)f(y)\,d\nu(y) \\
&= \int_G g(x-z)f(z-a)\,d\nu(z) = (g * (V_a f))(x) \\
&= (\operatorname{Convol}_g V_a f)(x).
\end{aligned}$$

Traslaciones y multiplicación por caracteres

Proposición

Sea $a \in G$. *Entonces* $F V_a F^* = M_{E_a}$.

Traslaciones y multiplicación por caracteres

Proposición

Sea $a \in G$. Entonces $FV_aF^* = M_{E_a}$.

Demostración. Sea $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Entonces

$$((FV_a)g)(t) = \int_G g(x-a)E(x,t)\,d\nu(x) = \int_G g(y)E(y+a,t)\,d\nu(x)$$
$$= E(a,t)\int_G g(y)E(y,t)\,d\nu(x) = ((M_{E_a}F)g)(t).$$

FV_a y $M_{E_a}F$ son acotados, $L^1(G) \cap L^2(G)$ es denso en $L^2(G)$.
Luego $FV_a = M_{E_a}F$ y $FV_aF^* = M_{E_a}$.

Diagonalización de operadores que actúan en $L^2(G)$ y son invariantes bajo traslaciones

Teorema

$$F\mathcal{A}F^* = \mathcal{M}.$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{A}$. Entonces para cada a en G

$$M_{E_a}(FSF^*) = FV_aSF^* = FSV_aF^* = (FSF^*)M_{E_a},$$

es decir, $FSF^* \in \mathcal{N}$. Luego $FSF^* \in \mathcal{M}$.

Diagonalización de operadores que actúan en $L^2(G)$ y son invariantes bajo traslaciones

Teorema

$$F\mathcal{A}F^* = \mathcal{M}.$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{A}$. Entonces para cada a en G

$$M_{E_a}(FSF^*) = FV_aSF^* = FSV_aF^* = (FSF^*)M_{E_a},$$

es decir, $FSF^* \in \mathcal{N}$. Luego $FSF^* \in \mathcal{M}$.

Hemos demostrado que $F\mathcal{A}F^* \subseteq \mathcal{M}$.
La contención $F\mathcal{A}F^* \supseteq \mathcal{M}$ es aún más fácil por demostrar.

Teorema de convolución

Sean $f, g \in L^1(G)$. Entonces

$$F(f * g) = (Ff)(Fg).$$

Teorema de convolución

Sean $f, g \in L^1(G)$. Entonces

$$F(f * g) = (Ff)(Fg).$$

Demostración. El intercambio de integrales se justifica con Tonelli–Fubini:

$$\begin{aligned}(F(f * g))(t) &= \int_G \int_G f(x-y)g(y)E(x,t)\,d\nu(y)d\nu(x) \\ &= \int_G g(y)E(y,t)\left(\int_G f(x-y)E(x-y,t)\,d\nu(x)\right)\,d\nu(y).\end{aligned}$$

En la integral interior hacemos el cambio de variable $z = x - y$. Obtenemos

$$(F(f * g))(t) = (Ff)(t)\,(Fg)(t).$$

Teorema de convolución

Sean $f, g \in L^1(G)$. Entonces

$$F(f * g) = (Ff)(Fg).$$

Demostración. El intercambio de integrales se justifica con Tonelli–Fubini:

$$\begin{aligned}
(F(f * g))(t) &= \int_G \int_G f(x-y)g(y)E(x,t)\,d\nu(y)d\nu(x) \\
&= \int_G g(y)E(y,t)\left(\int_G f(x-y)E(x-y,t)\,d\nu(x)\right)\,d\nu(y).
\end{aligned}$$

En la integral interior hacemos el cambio de variable $z = x - y$. Obtenemos

$$(F(f * g))(t) = (Ff)(t)\,(Fg)(t).$$

Corolario

Sean $f \in L^1(G)$, $g \in L^2(G)$. Entonces $F(f * g) = (Ff)\,(Fg)$.

Diagonalización de los operadores de convolución

Proposición

Sea $g \in L^1(G)$*. Entonces*

$$F \operatorname{Convol}_g F^* = M_{Fg}.$$

Diagonalización de los operadores de convolución

Proposición

Sea $g \in L^1(G)$. Entonces

$$F \operatorname{Convol}_g F^* = M_{Fg}.$$

Demostración. Para cada f en $L^2(G)$,

$$(F \operatorname{Convol}_g)f = F(g * f) = (Fg)(Ff) = (M_{Fg} F)f.$$

Por lo tanto

$$F \operatorname{Convol}_g = M_{Fg} F.$$

Multiplicando ambos lados por F^* obtenemos el resultado.

Resumen. Las siguientes álgebras C^* son isomorfas:

$$
\begin{tikzcd}
L^\infty(\widehat{G}) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{M} = \{M_a \colon\ a \in L^\infty(\widehat{G})\} \arrow[d, equal] \\
 & \text{centralizador de } \{M_a \colon\ a \in C_b(\widehat{G})\} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{A} := \text{centralizador de } \{V_x \colon\ x \in G\} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{N} := \text{centralizador de } \{M_a \colon\ a \in \mathcal{E}\}
\end{tikzcd}
$$