


# Convergencia uniforme a la función cuantil en el teorema de Szegő

Egor A. Maximenko

trabajos conjuntos con Johan Manuel Bogoya,  
Albrecht Böttcher y Sergei M. Grudsky

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

UAM-I, 11 de enero de 2017



Función  
cuantil

Teoremas de  
convergencia

Aplicación:  
matrices de Toeplitz

## Idea clave

Sean  $\xi_1, \dots, \xi_{1000}$  algunos números reales tales que

$$\xi_1 \leq \dots \leq \xi_{1000},$$

todas las diferencias  $\xi_{j+1} - \xi_j$  son pequeñas, y

$$\frac{\#\{j \in \{1, \dots, 1000\}: \xi_j \leq 4\}}{1000} \approx 0.7.$$

## Idea clave

Sean  $\xi_1, \dots, \xi_{1000}$  algunos números reales tales que

$$\xi_1 \leq \dots \leq \xi_{1000},$$

todas las diferencias  $\xi_{j+1} - \xi_j$  son pequeñas, y

$$\frac{\#\{j \in \{1, \dots, 1000\} : \xi_j \leq 4\}}{1000} \approx 0.7.$$

Entonces podemos afirmar que

$$\xi_{???} \approx ???.$$

## Idea clave

En general, si

$$\frac{\#\{j \in \{1, \dots, 1000\} : \xi_j \leq v\}}{1000} \approx F(v),$$

entonces podemos afirmar que

$$\xi_{???} \approx ???.$$

## Idea clave

En general, si

$$\frac{\#\{j \in \{1 \dots, 1000\}: \xi_j \leq v\}}{1000} \approx F(v),$$

entonces podemos afirmar que

$$\xi_{???} \approx ???.$$

Para aproximar  $\xi_j$  con  $j$  dado, hay que “invertir”  $F$ .

## Definición de la función cuantil

$\mathcal{M}(\mathbb{R}) :=$  las medidas de probabilidad Borel  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ .

Dada  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , se definen:

la **función de distribución**  $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,

$$F_\mu(v) := \mu(-\infty, v],$$

## Definición de la función cuantil

$\mathcal{M}(\mathbb{R}) :=$  las medidas de probabilidad Borel  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ .

Dada  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , se definen:

la **función de distribución**  $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,

$$F_\mu(v) := \mu(-\infty, v],$$

y la **función cuantil**  $Q_\mu: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$Q_\mu(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_\mu(v) \geq p\}.$$



## Definición de la función cuantil

$\mathcal{M}(\mathbb{R}) :=$  las medidas de probabilidad Borel  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ .

Dada  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , se definen:

la **función de distribución**  $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,

$$F_\mu(v) := \mu(-\infty, v],$$

y la **función cuantil**  $Q_\mu: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$Q_\mu(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_\mu(v) \geq p\}.$$

$Q_\mu$  es la función inversa derecha superior de  $F_\mu$ .

El **soporte** de  $\mu$  se define como

$$\text{supp}(\mu) := \{v \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(v - \varepsilon, v + \varepsilon) > 0\}.$$

# La función cuantil asociada a una variable aleatoria

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad,  
y sea  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\mathcal{F}$ -medible.

Le asociamos la **medida imagen**  $\mu_X \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ :

$$\mu_X(B) := P(X^{-1}(B)) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}.$$

En este caso, la función de distribución y la función cuantil son:

$$F_X(v) = \mu_X(-\infty, v] = P(X^{-1}(-\infty, v]) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq v\},$$

$$Q_X(p) = \inf\{v \in \mathbb{R}: F_X(v) \geq p\}.$$

## Medida asociada a un vector

Dotamos  $\{1, \dots, n\}$  con la medida de conteo normalizada.

Dado un vector  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

lo consideramos como v.a.  $\lambda: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

En este caso la medida imagen y la función de distribución se calculan como

$$\mu_\lambda(B) = \frac{\#\{j: \lambda_j \in B\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Dirac}_{\lambda_j},$$

$$F_\lambda(v) = \frac{\#\{j: \lambda_j \leq v\}}{n}.$$

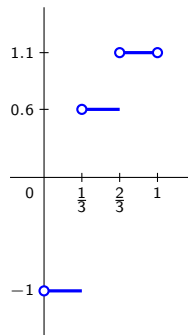
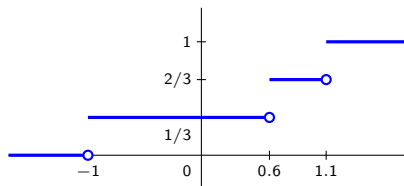
En particular, si  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , entonces

$$F_\lambda(v) = \frac{\text{máx}\{j: \lambda_j \leq v\}}{n}, \quad Q_\lambda(p) = \lambda_{\lceil pn \rceil}.$$

## Ejemplo de medida asociada a un vector

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 0.6, 1.1).$$

La función de distribución y la función cuantil:




## Otro ejemplo discreto



Los mismos números en el orden ascendente ( $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{10}$ ):



$Q(1/3) = \lambda_{\lceil 10/3 \rceil} = \lambda_4 = 118.$



# La medida y la función cuantil asociadas a una función

Consideramos  $[0, 2\pi]$  con la medida de Lebesgue normalizada.

Sea  $a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$ .

Entonces la **medida imagen**  $\mu_a \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$  se define como:

$$\mu_a(B) := \frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}}(a^{-1}(B)).$$

El **soporte** de  $\mu_a$  es la imagen esencial de  $a$ :

$$\text{supp}(a) = \mathcal{R}(a).$$

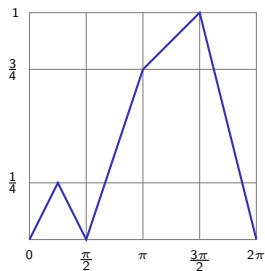
La **función de distribución** y la **función cuantil**:

$$F_a(v) := \frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}} \{ \theta \in [0, 2\pi] : a(\theta) \leq v \}, \quad v \in \mathbb{R};$$

$$Q_a(p) := \inf \{ v \in \mathbb{R} : F_a(v) \geq p \}, \quad p \in (0, 1).$$

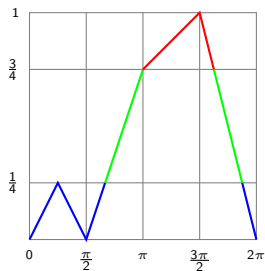
# Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de  $a$



# Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

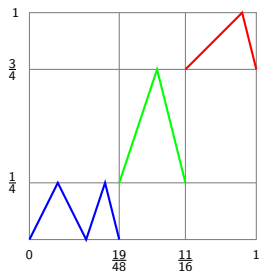
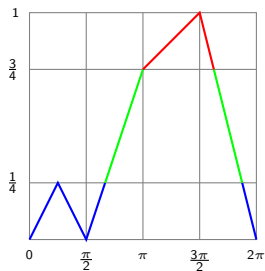
Gráfica de  $a$





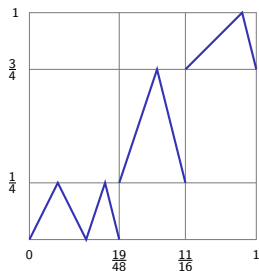
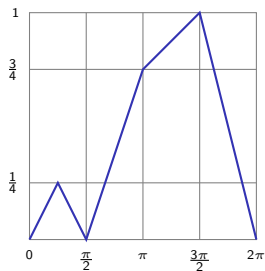
# Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de  $a$

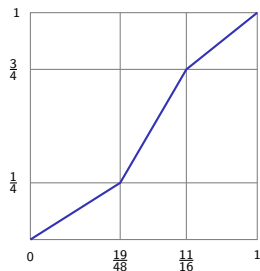


# Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de  $a$

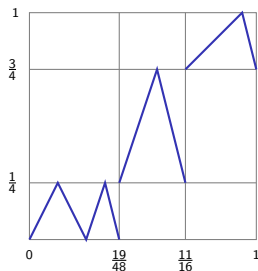
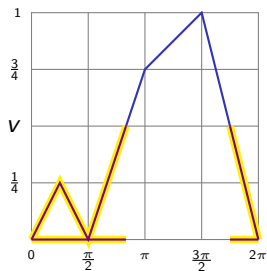


Gráfica de  $Q_a$

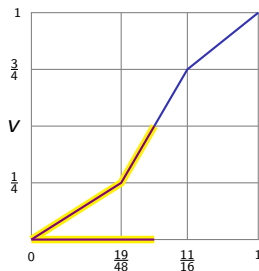


# Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de  $a$



Gráfica de  $Q_a$

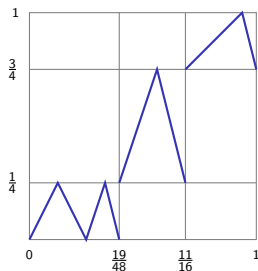
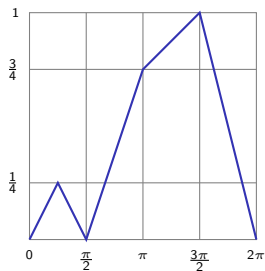


$a$  y  $Q_a$  son idénticamente distribuidas:

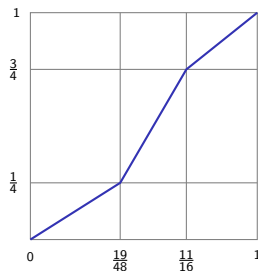
$$\frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}} \{ \theta \in [0, 2\pi] : a(\theta) \leq v \} = \mu_{\mathbb{R}} \{ p \in [0, 1] : Q_a(p) \leq v \}$$

# Construcción de la función cuantil asociada a una función lineal a trozos

Gráfica de  $a$



Gráfica de  $Q_a$



$a$   $\xrightarrow{\text{reordenamiento "a la Lebesgue"}}$   $Q_a$

## Aproximación uniforme de la función cuantil asociada a una función Riemann integrable

Sea  $a: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  una función Riemann integrable.

Supongamos que su imagen esencial  $\mathcal{R}(a)$  es un conjunto conexo.

Para cada  $n$  en  $\{1, 2, \dots\}$  consideramos los números

$$a\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Denotamos por  $\xi^{(n)}$  a la lista que se obtiene al ordenar estos números de manera ascendente. En otras palabras,

$$\xi_1^{(n)} \leq \dots \leq \xi_n^{(n)} \quad \text{y} \quad \xi_j^{(n)} = a\left(\frac{2\pi\sigma_n(j)}{n}\right),$$

donde  $\sigma_n$  es una permutación del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \xi_j^{(n)} - Q_a\left(\frac{j}{n}\right) \right| = 0.$$



Función  
cuantil

Teoremas de  
convergencia

Aplicación:  
matrices de Toeplitz

# Puntos de continuidad de una función

Sean  $X, Y$  algunos espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función.

$$\mathcal{C}(f) := \{x \in X: f \text{ es continua en } x\}.$$

Por ejemplo, si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x \rfloor}{1 + x^2},$$

entonces

$$\mathcal{C}(f) =$$

## Puntos de continuidad de una función

Sean  $X, Y$  algunos espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función.

$$\mathcal{C}(f) := \{x \in X: f \text{ es continua en } x\}.$$

Por ejemplo, si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x \rfloor}{1 + x^2},$$

entonces

$$\mathcal{C}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$



## Convergencia en distribución ( $\mu_n \rightsquigarrow \Lambda$ )

Sea  $\Lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$  y sea  $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ .

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\Lambda$$



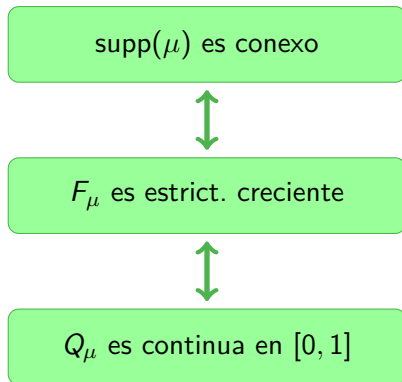
$$\forall v \in \mathcal{C}(F_{\Lambda}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu_n}(v) = F_{\Lambda}(v)$$



$$\forall p \in \mathcal{C}(Q_{\Lambda}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\mu_n}(p) = Q_{\Lambda}(p)$$

## Criterio de continuidad de la función cuantil

Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$  una medida de soporte compacto  $\text{supp}(\mu)$ .  
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:



## Lema sobre la convergencia uniforme

$$f_n(p) \rightarrow g(p) \\ \forall p \in [0, 1]$$

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \text{ son crecientes}$$

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ g \text{ es continua}$$

$$f_n \xrightarrow{[0,1]} g$$

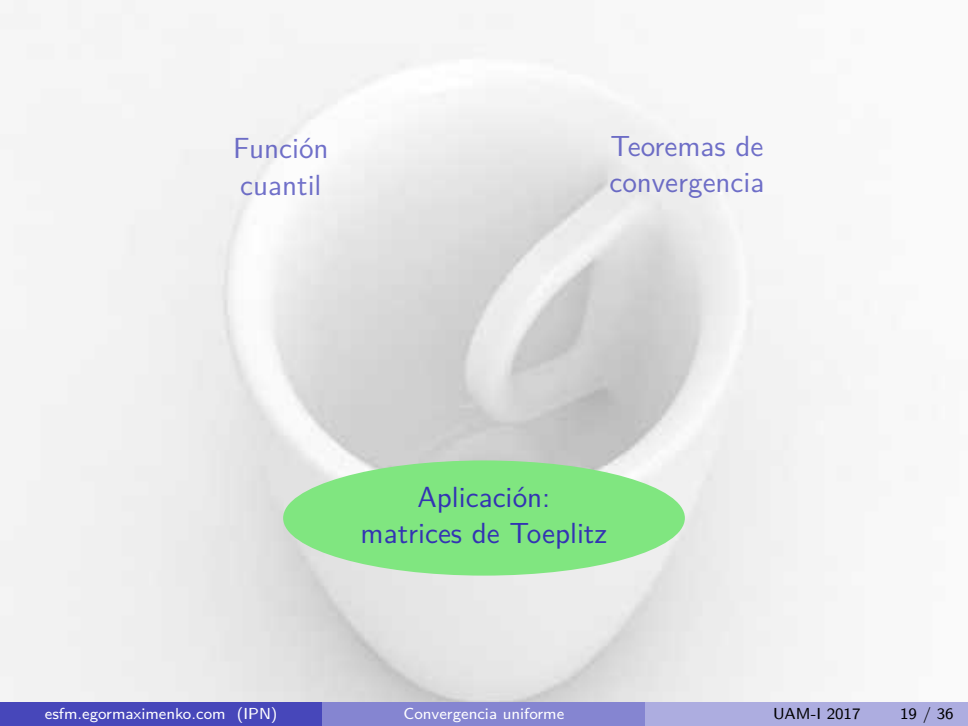
# Resultado principal

$$\mu_n \rightsquigarrow \Lambda$$

$$\mu_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \\ \text{supp}(\mu_n) \subseteq [\alpha, \beta]$$

$$\Lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \\ \text{supp}(\Lambda) = [\alpha, \beta]$$

$$Q_{\mu_n} \xrightarrow{[0,1]} Q_{\Lambda}$$



Función  
cuantil

Teoremas de  
convergencia

Aplicación:  
matrices de Toeplitz

# Operador de convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Sea  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . Definimos

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad C(a)x := a * x = \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k \right]_{j \in \mathbb{Z}}.$$

El operador  $C(a)$  se puede identificar con la matriz infinita  $[a_{j-k}]_{j,k \in \mathbb{Z}}$ :

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

# Diagonalización del operador de convolución

$\mathcal{F}$  := la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

# Diagonalización del operador de convolución

$\mathcal{F}$  := la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a)$  := el operador de multiplicación por la función  $a$ :

$$M(a): L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$



# Diagonalización del operador de convolución

$\mathcal{F}$  := la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a)$  := el operador de multiplicación por la función  $a$ :

$$M(a): L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$

Teorema de convolución:

$$\mathcal{F}(a * x) = (\mathcal{F}a)(\mathcal{F}x).$$

## Diagonalización del operador de convolución

$\mathcal{F}$  := la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a)$  := el operador de multiplicación por la función  $a$ :

$$M(a): L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$

Teorema de convolución:

$$\mathcal{F}(a * x) = (\mathcal{F}a)(\mathcal{F}x).$$

Por el teorema de convolución,

$$\mathcal{F}C(a)\mathcal{F}^{-1} = M(a), \quad \text{esto es,} \quad C(a) = \mathcal{F}^{-1}M(a)\mathcal{F}.$$

## Corolarios de la diagonalización de $C(a)$

De la igualdad  $C(a) = \mathcal{F}^{-1}M(a)\mathcal{F}$  se deduce fácilmente que

$$C(a)C(b) = C(ab),$$

$$\|C(a)\| = \|M(a)\| = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |a(\theta)|,$$

$$\text{sp}(C(a)) = \text{sp}(M(a)) = a([0, 2\pi]).$$

En una situación más general, si  $a \in L^\infty([0, 2\pi])$ , entonces

$$\|C(a)\| = \|a\|_\infty, \quad \text{sp}(C(a)) = \mathcal{R}(a).$$

# Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Es cómodo suponer que  $a_j$  son los coeficientes de Fourier de una función  $a$  definida en  $[0, 2\pi]$ :

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) e^{-ji\theta} d\theta.$$

La función  $a$  se llama el *símbolo generador* de las matrices

$$T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n.$$

La matriz  $T_n(a)$  es un corte finito del operador de convolución

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

$$T_3(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

## Matrices de Toeplitz con símbolos reales acotados

Suponemos que el símbolo generador es acotado y real:

$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R}).$$

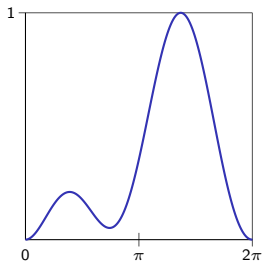
En este caso las matrices de Toeplitz son hermitianas:

$$a_{-k} = \overline{a_k}, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

# Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

Gráfica de  $a$

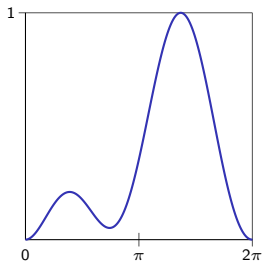


Valores propios de  $T_8(a)$



# Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

Gráfica de  $a$



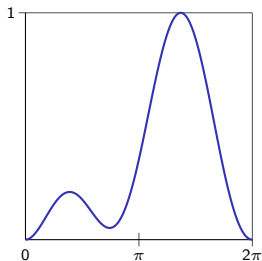
Valores propios de  $T_{16}(a)$





# Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

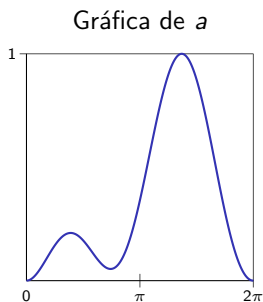
Gráfica de  $a$



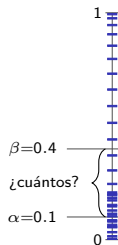
Valores propios de  $T_{32}(a)$



# Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

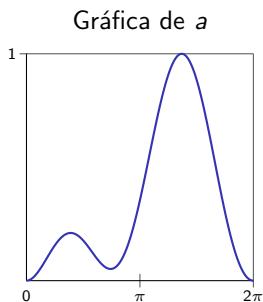


Valores propios de  $T_{32}(a)$

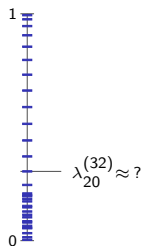


Primera pregunta: ¿Cuántos valores propios están en  $[\alpha, \beta]$  ?

# Comportamiento de valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas



Valores propios de  $T_{32}(a)$



Primera pregunta: ¿Cuántos valores propios están en  $[\alpha, \beta]$  ?

Segunda pregunta:  $\lambda_j^{(n)} \approx ?$

## El primer teorema límite de Szegő (1920)

$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

$$\varphi \in C(\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a(\theta)) d\theta$$

# Corolario del teorema de Szegő

(distribución de los valores propios de matrices de Toeplitz)

símbolo generador  
 $a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$

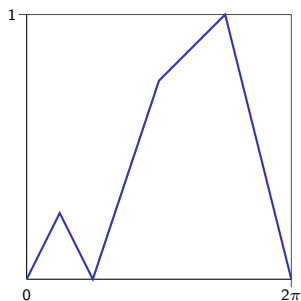
$\alpha < \beta$   
 $a(\theta) \neq \alpha, \beta$  a.e.

$$\frac{\#\{j: \alpha \leq \lambda_j^{(n)} \leq \beta\}}{n} \longrightarrow \frac{\mu_{\mathbb{R}}(a^{-1}([\alpha, \beta]))}{2\pi}$$

En otras palabras,  $\mu_{\lambda^{(n)}} \rightsquigarrow \mu_a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

# Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de  $a$

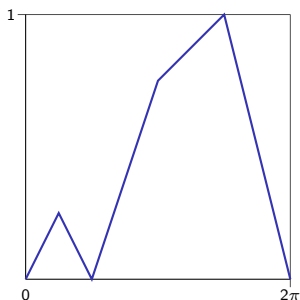


Valores propios de  $T_{32}(a)$

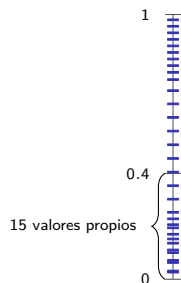


# Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de  $a$



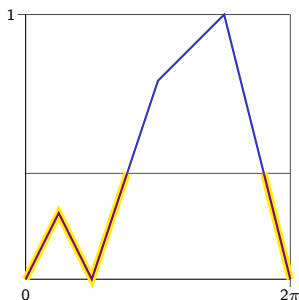
Valores propios de  $T_{32}(a)$



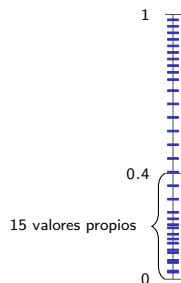
$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

# Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de  $a$



Valores propios de  $T_{32}(a)$

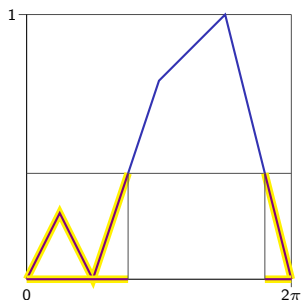


$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

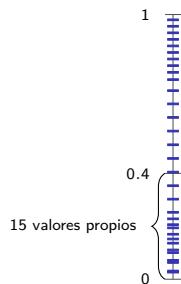


# Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de  $a$



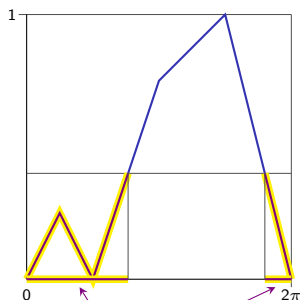
Valores propios de  $T_{32}(a)$



$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

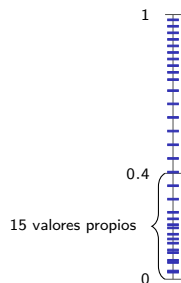
# Ejemplo para ilustrar el teorema de Szegő

Gráfica de  $a$



$$\frac{\mu_{\mathbb{R}} \{ \theta : 0 \leq a(\theta) \leq 0.4 \}}{2\pi} = 0.483$$

Valores propios de  $T_{32}(a)$



$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

# Aproximación uniforme de valores propios de matrices de Toeplitz

$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

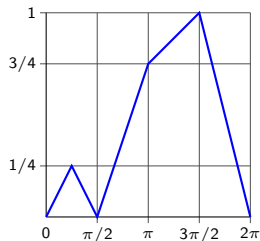
$$\mathcal{R}(a) = [\alpha, \beta]$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j^{(n)} - Q_a(j/n)| \longrightarrow 0$$

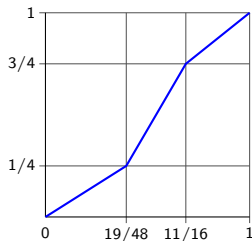
# Primer ejemplo

Símbolo generador continuo

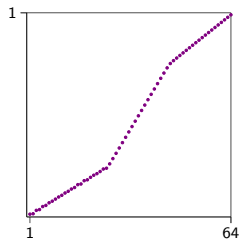
Gráfica de  $a$



Gráfica de  $Q_a$



Eigenvalores de  $T_{64}(a)$



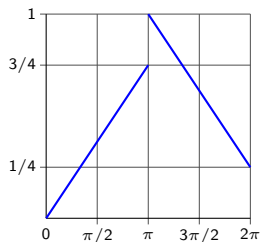
Cada valor propio  $\lambda_j^{(n)}$  se muestra como un punto  $\left(\frac{j}{n}, \lambda_j^{(n)}\right)$ .

Observamos que el tercer dibujo es muy similar al segundo.

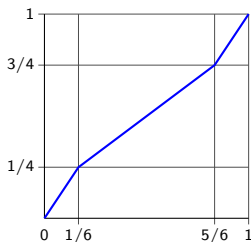
## Otro ejemplo

$a$  no es continua, pero  $\mathcal{R}(a)$  es conexo

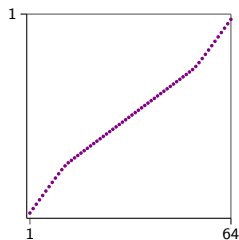
Gráfica de  $a$



Gráfica de  $Q_a$



Eigenvalores de  $T_{64}(a)$



$\lambda_j^{(n)}$  se aproxima uniformemente por  $Q_a(j/n)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

# Más aplicaciones

Hay muchos resultados sobre la distribución asintótica:

- Teorema de Avram–Parter sobre los valores singulares.
- Teoremas tipo Szegő para matrices localmente de Toeplitz.
- La ley de arco seno de Lévy para caminatas aleatorias.
- Teorema de Weyl sobre sucesiones uniformemente distribuidas.

Con el concepto de la función cuantil se deducen corolarios sobre la aproximación uniforme.

# Conclusión sobre los eigenvalores de matrices de Toeplitz



# Conclusión sobre los eigenvalores de matrices de Toeplitz

El teorema límite de Szegő combinado con el concepto de función cuantil nos proporciona el término principal de la asintótica de los eigenvalores:

$$\lambda_j^{(n)} \approx Q_a\left(\frac{j}{n}\right)$$

suponiendo que  $\mathcal{R}(a)$  es un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$ .



# Antecedentes



Fabio Di Benedetto, Giuseppe Fiorentino, Stefano Serra (1993):  
C. G. Preconditioning for Toeplitz matrices.  
[doi:10.1016/0898-1221\(93\)90297-9](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90297-9)

Demostraron la convergencia puntual,  
suponiendo que  $a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$  y que  $F_a$  es continua.

# Antecedentes



Fabio Di Benedetto, Giuseppe Fiorentino, Stefano Serra (1993):  
C. G. Preconditioning for Toeplitz matrices.  
[doi:10.1016/0898-1221\(93\)90297-9](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90297-9)

Demostraron la convergencia puntual,  
suponiendo que  $a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$  y que  $F_a$  es continua.



William Trench (2012):  
An elementary view of Weyl's theory of equal distribution.  
[doi:10.4169/amer.math.monthly.119.10.852](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.119.10.852)

Demostró la convergencia en promedio.

## Nuestras publicaciones



Johan Bogoya, Albrecht Böttcher, Sergei Grudsky, M. (2015):  
Maximum norm versions of the Szegő and Avram-Parter theorems for  
Toeplitz matrices.

[doi:10.1016/j.jat.2015.03.003](https://doi.org/10.1016/j.jat.2015.03.003)



Johan Bogoya, Albrecht Böttcher, M. (2016):  
From convergence in distribution to uniform convergence.

[doi:10.1007/s40590-016-0105-y](https://doi.org/10.1007/s40590-016-0105-y)

En mi página se pueden encontrar dibujos interactivos que muestran la aproximación

$$\lambda_j^{(n)} \approx Q_a(j/n).$$