

Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas: aproximación uniforme por medio de la función cuantil

Egor Maximenko

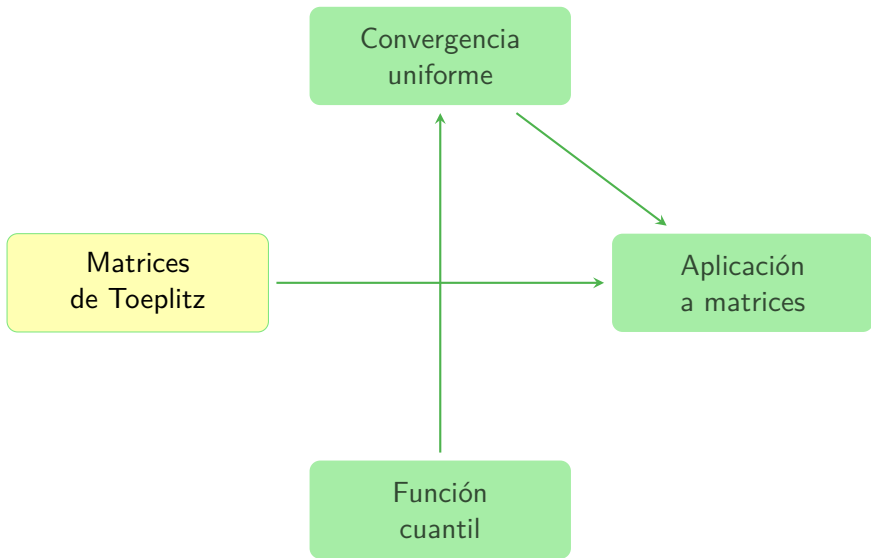
<http://esfm.egormaximenko.com>

usando trabajos conjuntos con

Johan Manuel Bogoya, Albrecht Böttcher y Sergei Grudsky

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Escuela de verano 2016
CINVESTAV, México



Operador de convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$ (repass)

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Definimos

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad C(a)x := a * x = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k \right]_{j \in \mathbb{Z}}.$$

El operador $C(a)$ se puede identificar con la matriz infinita $[a_{j-k}]_{j,k \in \mathbb{Z}}$:

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Diagonalización del operador de convolución (repass)

\mathcal{F} := la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo \mathbb{Z} :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

Diagonalización del operador de convolución (repass)

\mathcal{F} := la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo \mathbb{Z} :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a)$:= el operador de multiplicación por la función a :

$$M(a): L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$

Diagonalización del operador de convolución (repass)

\mathcal{F} := la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo \mathbb{Z} :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a)$:= el operador de multiplicación por la función a :

$$M(a): L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$

Teorema de convolución:

$$\mathcal{F}(a * x) = (\mathcal{F}a)(\mathcal{F}x).$$

Diagonalización del operador de convolución (repass)

\mathcal{F} := la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo \mathbb{Z} :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a)$:= el operador de multiplicación por la función a :

$$M(a): L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$

Teorema de convolución:

$$\mathcal{F}(a * x) = (\mathcal{F}a)(\mathcal{F}x).$$

Por el teorema de convolución,

$$\mathcal{F}C(a)\mathcal{F}^{-1} = M(a), \quad \text{esto es,} \quad C(a) = \mathcal{F}^{-1}M(a)\mathcal{F}.$$

Corolarios de la diagonalización de $C(a)$

De la igualdad $C(a) = \mathcal{F}^{-1}M(a)\mathcal{F}$ se deduce fácilmente que

$$C(a)C(b) = C(ab),$$

$$\|C(a)\| = \|M(a)\| = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |a(\theta)|,$$

$$\text{sp}(C(a)) = \text{sp}(M(a)) = a([0, 2\pi]) = \{a(\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} .$$

Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Suponemos que $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión sumable:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty.$$

Consideramos la serie de Fourier con estos coeficientes:

$$a(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ki\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

La función a se llama el *símbolo generador* de las matrices

$$T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n.$$

La matriz $T_n(a)$ es un corte finito del operador de convolución

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

$$T_3(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Matrices de Toeplitz autoadjuntas

Suponemos que el símbolo generador es continuo y real:

$$a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R}).$$

En este caso las matrices $T_n(a)$ son hermíticas:

$$a_{-k} = \overline{a_k}, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$



stealed from
loveiscomix.com



$$\begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$



Entender a una matriz autoadjunta es...

$$\begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$



Entender a una matriz autoadjunta es...
... entender el comportamiento de sus
valores y vectores propios.

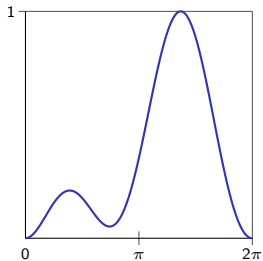
Problema: valores propios de matrices de Toeplitz

El objetivo es describir propiedades asintóticas de $T_n(a)$, en particular, el comportamiento asintótico de sus valores propios. Los ordenamos de manera ascendente:

$$\lambda_1^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)}.$$

Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de a

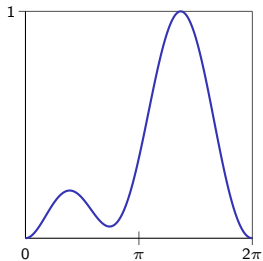


Valores propios de $T_8(a)$



Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de a

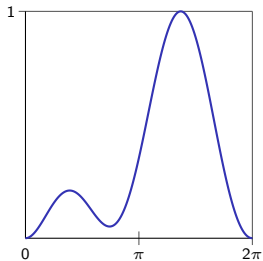


Valores propios de $T_{16}(a)$



Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de a

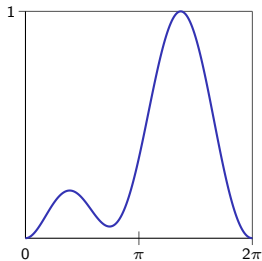


Valores propios de $T_{32}(a)$

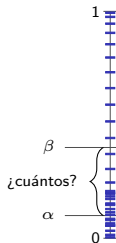


Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de a



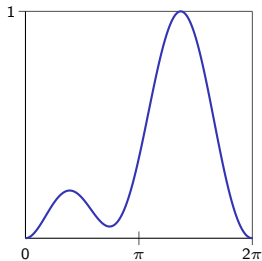
Valores propios de $T_{32}(a)$



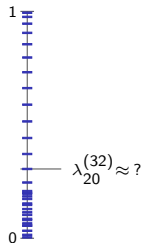
Primera pregunta: $\#\{j: \lambda_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$ (Szegő, 1920)

Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de a



Valores propios de $T_{32}(a)$



Primera pregunta: $\#\{j: \lambda_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$ (Szegő, 1920)

Segunda pregunta: $\lambda_j^{(n)} \approx ?$

La traza generalizada de una matriz de Toeplitz

Es fácil calcular la traza de una matriz de Toeplitz:

$$\operatorname{tr}(T_n(a)) = na_0 = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) d\theta.$$

La traza generalizada de una matriz de Toeplitz

Es fácil calcular la traza de una matriz de Toeplitz:

$$\operatorname{tr}(T_n(a)) = na_0 = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) d\theta.$$

Dada una función $\varphi \in C(\mathbb{R})$, la φ -traza de $T_n(a)$ se define como

$$\operatorname{tr}(\varphi(T_n(a))) = \sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}).$$

La traza generalizada de una matriz de Toeplitz

Es fácil calcular la traza de una matriz de Toeplitz:

$$\operatorname{tr}(T_n(a)) = na_0 = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) d\theta.$$

Dada una función $\varphi \in C(\mathbb{R})$, la φ -traza de $T_n(a)$ se define como

$$\operatorname{tr}(\varphi(T_n(a))) = \sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}).$$

Consideremos el comportamiento asintótico de esta expresión, cuando $n \rightarrow \infty$.

$T_n(a)T_n(b) \approx T_n(ab)$ en cierto sentido

Lema

Sean $a, b: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \|T_n(a)T_n(b) - T_n(ab)\|_{\text{tr}} \right) = 0,$$

donde $\|\cdot\|_{\text{tr}}$ es la “norma nuclear” (“norma traza”) de la matriz.

$T_n(a)T_n(b) \approx T_n(ab)$ en cierto sentido

Lema

Sean $a, b: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \|T_n(a)T_n(b) - T_n(ab)\|_{\text{tr}} \right) = 0,$$

donde $\|\cdot\|_{\text{tr}}$ es la “norma nuclear” (“norma traza”) de la matriz.

Este lema permite demostrar que

$$\frac{1}{n} \text{tr}(T_n^p(a)) \approx \frac{1}{n} \text{tr}(T_n(a^p)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^p(\theta) d\theta,$$

$T_n(a)T_n(b) \approx T_n(ab)$ en cierto sentido

Lema

Sean $a, b: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \|T_n(a)T_n(b) - T_n(ab)\|_{\text{tr}} \right) = 0,$$

donde $\|\cdot\|_{\text{tr}}$ es la “norma nuclear” (“norma traza”) de la matriz.

Este lema permite demostrar que

$$\frac{1}{n} \text{tr}(T_n^p(a)) \approx \frac{1}{n} \text{tr}(T_n(a^p)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^p(\theta) d\theta,$$

luego

$$\frac{1}{n} \text{tr}(\varphi(T_n(a))) \approx \frac{1}{n} \text{tr}(T_n(\varphi \circ a)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a(\theta)) d\theta,$$

para cualquier polinomio φ .

Teorema de Szegő

$$a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

$$\varphi \in C(\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a(\theta)) d\theta$$

Corolario del teorema límite de Szegő

distribución de los valores propios de matrices de Toeplitz

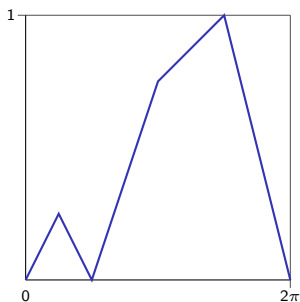
$$a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

$$\alpha < \beta$$
$$a \neq \alpha, \beta \quad \text{c.t.p.}$$

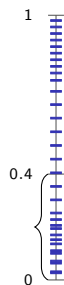
$$\frac{\#\{j: \alpha \leq \lambda_j^{(n)} \leq \beta\}}{n} \longrightarrow \frac{\mu_{\mathbb{R}} \{\theta \in [0, 2\pi]: \alpha \leq a(\theta) \leq \beta\}}{2\pi}$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de a

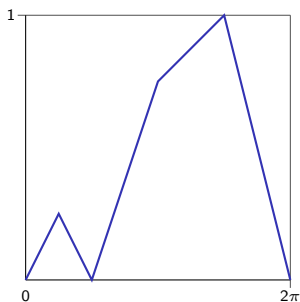


Valores propios de $T_{32}(a)$

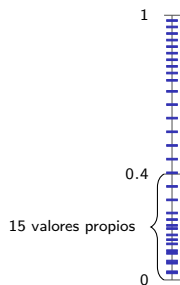


Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de a



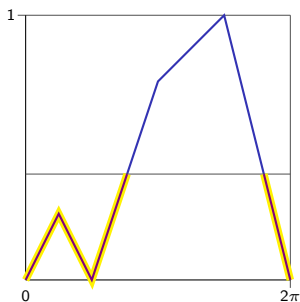
Valores propios de $T_{32}(a)$



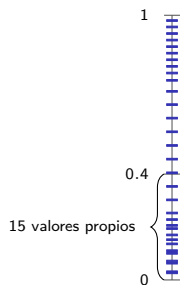
$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de a



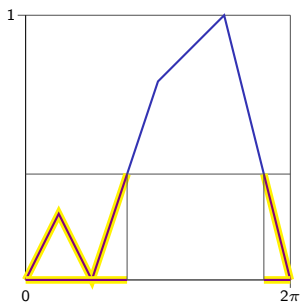
Valores propios de $T_{32}(a)$



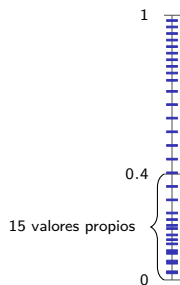
$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de a



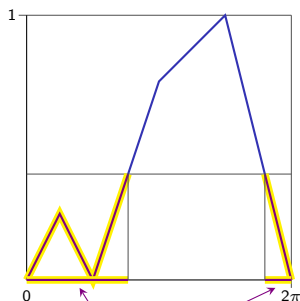
Valores propios de $T_{32}(a)$



$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

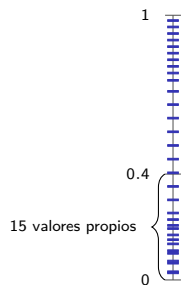
Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de a



$$\frac{\mu_{\mathbb{R}} \{ \theta : 0 \leq a(\theta) \leq 0.4 \}}{2\pi} = 0.483$$

Valores propios de $T_{32}(a)$



$$\frac{15}{32} \approx 0.469$$

Szegő describió la distribución asintótica de los valores propios de $T_n(a)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Otra pregunta se quedó sin respuesta:

$$\lambda_j^{(n)} \approx ?$$

Idea clave

Sean ξ_1, \dots, ξ_{1000} algunos números reales tales que $\xi_1 \leq \dots \leq \xi_{1000}$, todas las diferencias $\xi_{j+1} - \xi_j$ son pequeñas, y

$$\frac{\#\{j \in \{1, \dots, 1000\}: \xi_j \leq -2\}}{1000} \approx 0.7.$$

Entonces podemos afirmar que

$$\xi_{???} \approx ???.$$

Idea clave

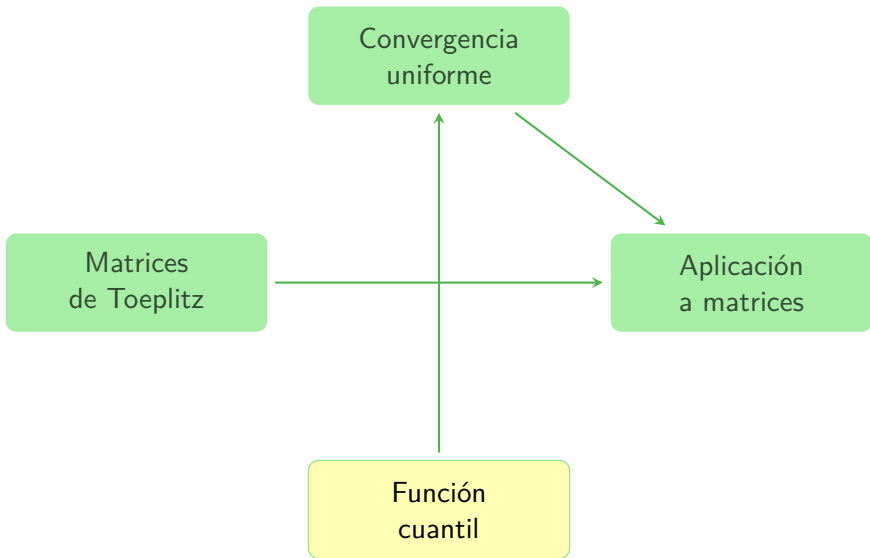
En general, si

$$\frac{\#\{j \in \{1 \dots, 1000\}: \xi_j \leq v\}}{1000} \approx F(v),$$

entonces podemos afirmar que

$$\xi_{???} \approx ???.$$

Para aproximar ξ_j con j dado, hay que “invertir” F .



La función cuantil asociada a una variable aleatoria

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad,
y sea $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{F} -medible.

Le asociamos la función de distribución y la función cuantil:

$$F_X(v) := P(X^{-1}(-\infty, v]),$$

$$Q_X(p) := \inf\{v \in \mathbb{R}: F_X(v) \geq p\}.$$

Se puede decir que Q_X es la “inversa derecha superior” de la función F_X .

Una lista de números como una variable aleatoria

Sea $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ una lista de números reales.

Dotamos $\{1, \dots, n\}$ con la medida de conteo normalizada:

$$\mu_n(J) = \frac{\#J}{n} \quad (J \subseteq \{1, \dots, n\}),$$

y consideramos ξ como una variable aleatoria.

Si la lista (ξ_1, \dots, ξ_n) es ordenada de manera ascendente, entonces

$$F_\xi(v) = \frac{\max\{j \in \{1, \dots, d\}: \xi_j \leq v\}}{d}$$

y

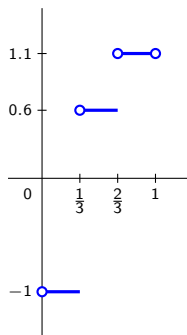
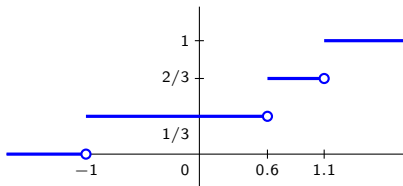
$$Q_\xi(j/d) = \xi_j.$$

Ejemplo

Consideremos una lista de tres números reales:

$$\xi = (-1, 0.6, 1.1).$$

Los dibujos muestran la función de distribución y la función cuantil:



Otro ejemplo



Los mismos números en el orden ascendente:

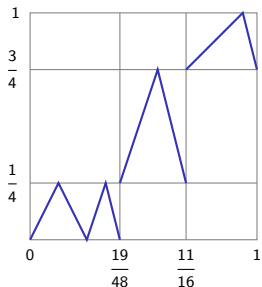
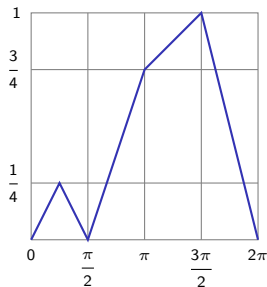


$$Q(1/3) = 118$$

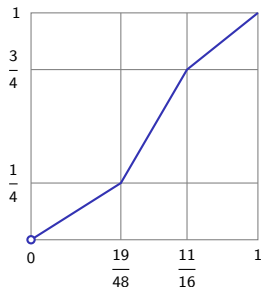
porque 118 es el número más pequeño entre los números v tales que al menos $1/3$ de los elementos son menores o iguales a v .

Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de a

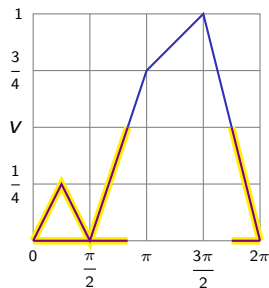


Gráfica de Q_a

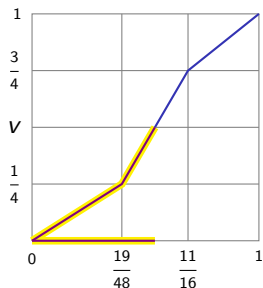
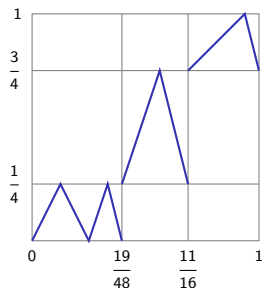


Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de a



Gráfica de Q_a

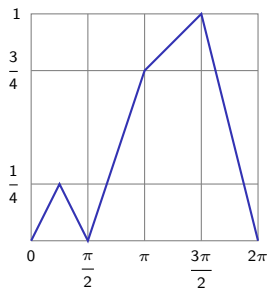


a y Q_a son idénticamente distribuidas:

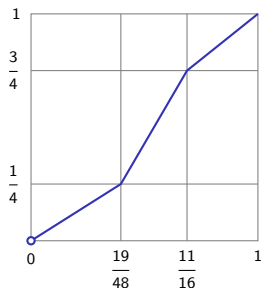
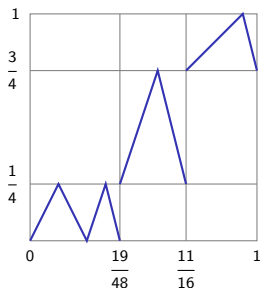
$$\frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}} \{ \theta \in [0, 2\pi] : a(\theta) \leq v \} = \mu_{\mathbb{R}} \{ p \in [0, 1] : Q_a(p) \leq v \}$$

Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

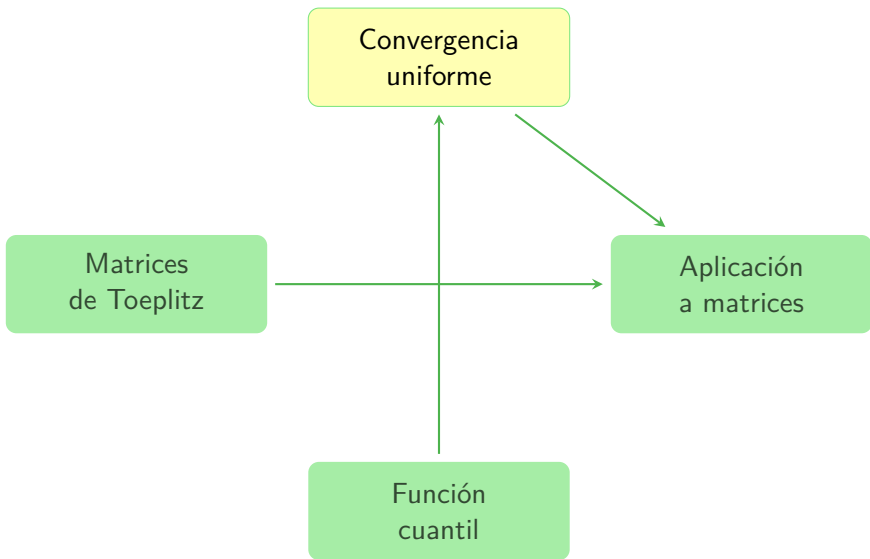
Gráfica de a



Gráfica de Q_a



a $\xrightarrow{\text{reordenamiento en el estilo de Lebesgue}}$ Q_a



Puntos de continuidad de una función

Sean X, Y algunos espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

$$\mathcal{C}(f) := \{x \in X : f \text{ es continua en } x\}.$$

Por ejemplo, si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x \rfloor}{1 + x^2},$$

entonces

$$\mathcal{C}(f) =$$

Puntos de continuidad de una función

Sean X, Y algunos espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

$$\mathcal{C}(f) := \{x \in X : f \text{ es continua en } x\}.$$

Por ejemplo, si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x \rfloor}{1 + x^2},$$

entonces

$$\mathcal{C}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Criterio de convergencia en distribución ($X_n \rightsquigarrow Y$)

Sea Y una variable aleatoria, y sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} \varphi \circ X_n d\mu_n = \int_{\Omega} \varphi \circ Y d\mu$$



$$\forall v \in C(F_Y) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(v) = F_Y(v)$$



$$\forall p \in C(Q_Y) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{X_n}(p) = Q_Y(p)$$

Lema sobre la convergencia uniforme

$$f_n(p) \rightarrow g(p) \\ \forall p \in [0, 1]$$

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \text{ son crecientes}$$

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ g \text{ es continua}$$

$$f_n \xrightarrow{[0,1]} g$$

Teorema (resultado principal):
de la convergencia más débil a la convergencia más fuerte

$$X_n \rightsquigarrow Y$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \\ X_n(\Omega_n) \subseteq [\alpha, \beta]$$

$$Y \in C([0, 2\pi], \mathbb{R}) \\ Y([0, 2\pi]) = [\alpha, \beta]$$

$$Q_{X_n} \xrightarrow{[0,1]} Q_Y$$

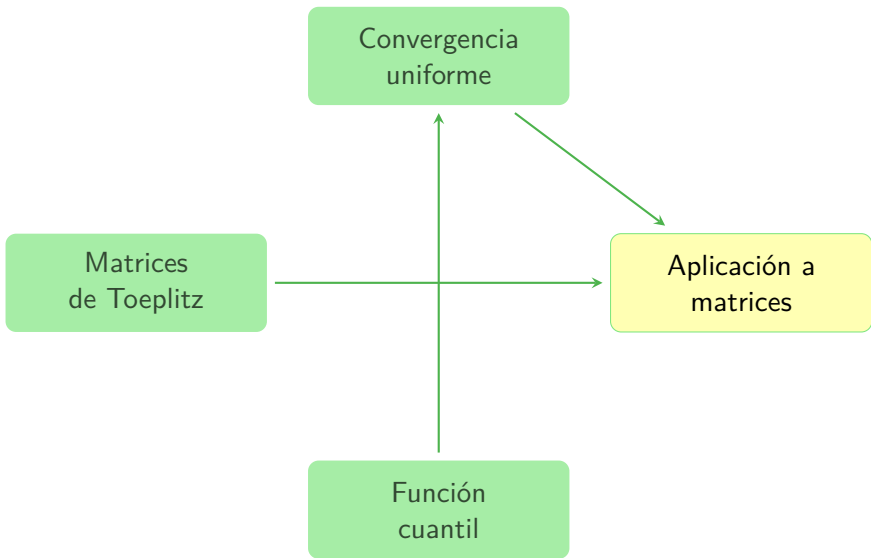
Corolario: de la distribución asintótica de tuplas a la convergencia uniforme

Supongamos que

- $(\xi^{(n)})_{n=1}^{\infty} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{d(n)}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de tuplas en \mathbb{R} .
- $a \in C([0, 2\pi])$ y $a([0, 2\pi]) = [\alpha, \beta]$.
- $\alpha \leq \xi_1^{(n)} \leq \alpha_2^{(n)} \leq \dots \leq \alpha_n^{(n)} \leq \beta$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- ξ es asintóticamente distribuida como a , esto es, $\xi^{(n)} \rightsquigarrow a$.

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j^{(n)} - Q_a(j/n)| = 0.$$



Convergencia uniforme de los valores propios de matrices de Toeplitz

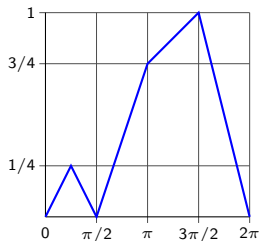
$$a \in C([0, 2\pi])$$

$$a([0, 2\pi]) \subseteq \mathbb{R}$$

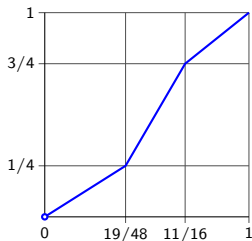
$$\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j^{(n)} - Q_a(j/n)| \longrightarrow 0$$

Ejemplo

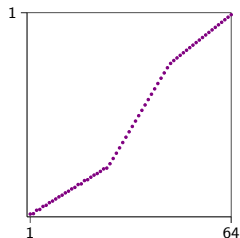
Gráfica de a



Gráfica de Q_a



Val. prop. de $T_{64}(a)$

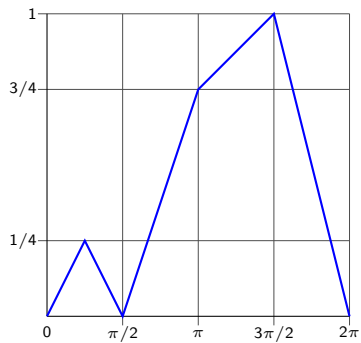


Cada valor propio $\lambda_j^{(n)}$ se muestra como el punto $\left(\frac{j}{n}, \lambda_j^{(n)}\right)$.

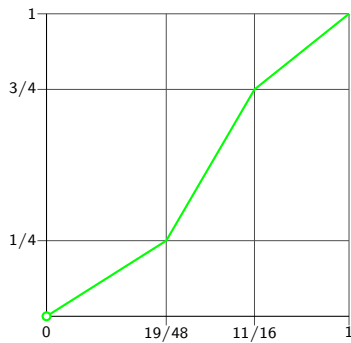
Se ve que el tercer dibujo parece mucho al segundo.

Ejemplo

Gráfica de a

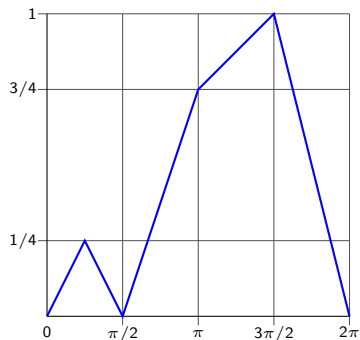


Gráfica de Q_a

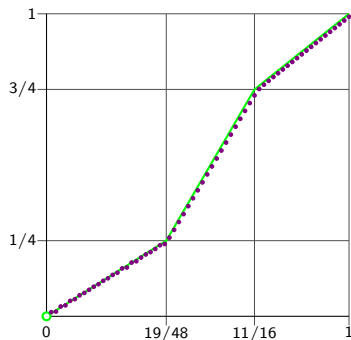


Ejemplo

Gráfica de a



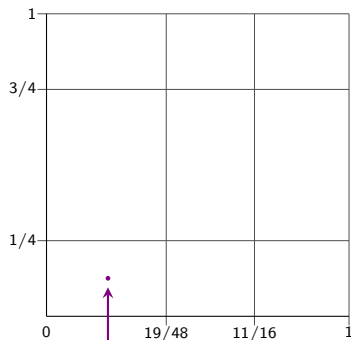
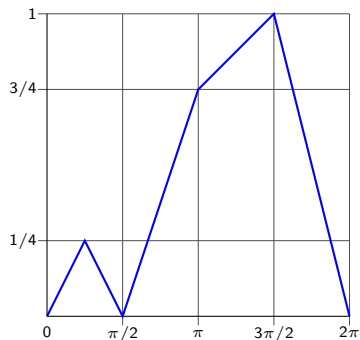
Gráfica de Q_a



y los puntos $(j/n, \lambda_j^{(n)})$

Ejemplo

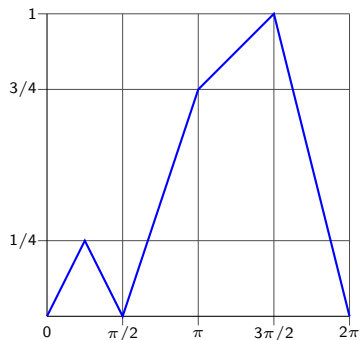
Gráfica de a



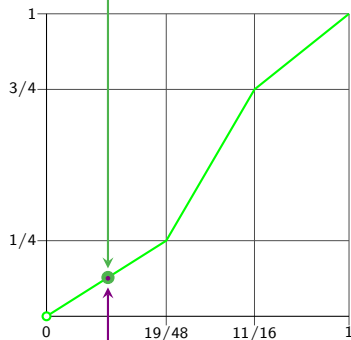
$$\left(\frac{13}{64}, \lambda_{13}^{(64)}\right)$$

Ejemplo

Gráfica de a



$$\left(\frac{13}{64}, Q_a \left(\frac{13}{64} \right) \right)$$



$$\left(\frac{13}{64}, \lambda_{13}^{(64)} \right)$$



El teorema límite de Szegő
combinado con el concepto de función cuantil
nos proporciona el término principal
de la asintótica de los valores propios:

$$\lambda_j^{(n)} \approx Q_a\left(\frac{j}{n}\right)$$

suponiendo que $a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Antecedentes



Fabio Di Benedetto, Giuseppe Fiorentino, Stefano Serra (1993):
C. G. Preconditioning for Toeplitz matrices.
[doi:10.1016/0898-1221\(93\)90297-9](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90297-9)

Demostraron la convergencia puntual,
suponiendo que $a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ y que F_a es continua.

Antecedentes



Fabio Di Benedetto, Giuseppe Fiorentino, Stefano Serra (1993):
C. G. Preconditioning for Toeplitz matrices.
[doi:10.1016/0898-1221\(93\)90297-9](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90297-9)

Demostraron la convergencia puntual,
suponiendo que $a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ y que F_a es continua.



William Trench (2012):
An elementary view of Weyl's theory of equal distribution.
[doi:10.4169/amer.math.monthly.119.10.852](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.119.10.852)

Demostró la convergencia en promedio.