

# Matrices de Toeplitz

Egor Maximenko

usando trabajos conjuntos con

Johan Manuel Bogoya, Albrecht Böttcher y Sergei Grudsky

Escuela Superior de Física y Matemáticas  
del Instituto Politécnico Nacional, México

Escuela de verano 2016  
CINVESTAV del IPN

Convolución  
de sucesiones

Matrices  
de Toeplitz

Ondas sobre  
un segmento  
discretizado

## Sucesiones bilaterales

$$a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \quad \begin{array}{l} \vdots \\ -2 \mapsto a_{-2} \\ -1 \mapsto a_{-1} \\ 0 \mapsto a_0 \\ 1 \mapsto a_1 \\ 2 \mapsto a_2 \\ \vdots \end{array} \quad a = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{-2} \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Consideramos sucesiones sumables o cuadrado sumables:

$$\ell^1(\mathbb{Z}) := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| < +\infty \right\},$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j|^2 < +\infty \right\}.$$

## Vectores y sucesiones

Operador de extensión  $J_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ ,

operador de proyección  $P_n: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

$$J_3: \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} . \quad P_3: \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-2} \\ x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

## Convolución de sucesiones

Sean  $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . La sucesión  $a * b$  se define mediante la regla

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k = \sum_{\substack{m, k \in \mathbb{Z} \\ m+k=j}} a_m b_k.$$

Ejemplo con sucesiones finitas:

$$a = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad a * b = \begin{bmatrix} \vdots \\ * \\ * \\ * \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \\ * \\ * \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

## Operador de convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Sea  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . Definimos

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad C(a)x := a * x.$$

El operador  $C(a)$  se puede identificar con la matriz infinita  $[a_{j-k}]_{j,k \in \mathbb{Z}}$ :

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

# Aplicaciones de convoluciones

- Multiplicación de polinomios (o de números enteros grandes).
- Filtros de imágenes.
- Diferencias finitas (de primer orden, de segundo orden, etc.).
- Códigos de convolución  
(para detectar y corregir errores de transmisión).
- Emparejamiento de cadenas de caracteres  
(encontrar el desplazamiento que da la mejor coincidencia).
- Emparejamiento de ADN.

¿Cómo estudiar propiedades del operador de convolución?

¿Cómo calcular su norma y espectro?

$$\|C(a)\| = ???, \quad \text{sp}(C(a)) = ???.$$



## Idea: la función generatriz de una sucesión

Recordamos un truco muy popular en análisis y en combinatoria.  
Para estudiar una sucesión  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ , puede ser útil la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

## Idea: la función generatriz de una sucesión

Recordamos un truco muy popular en análisis y en combinatoria. Para estudiar una sucesión  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ , puede ser útil la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

En el caso de una sucesión bilateral consideramos la serie de Laurent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k.$$

## Idea: la función generatriz de una sucesión

Recordamos un truco muy popular en análisis y en combinatoria. Para estudiar una sucesión  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ , puede ser útil la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

En el caso de una sucesión bilateral consideramos la serie de Laurent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k.$$

Si  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , entonces ¿cómo garantizar la convergencia de la serie?

## Idea: la función generatriz de una sucesión

Recordamos un truco muy popular en análisis y en combinatoria. Para estudiar una sucesión  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ , puede ser útil la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

En el caso de una sucesión bilateral consideramos la serie de Laurent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k.$$

Si  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , entonces ¿cómo garantizar la convergencia de la serie?

Es natural suponer que  $|t| = 1$ , esto es,

$$t = e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

## Series de Fourier y coeficientes de Fourier

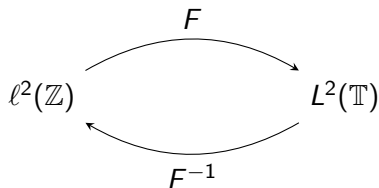
$F: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2[0, 2\pi]$  transforma cada sucesión en su serie de Fourier:

$$(Fx)(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k e^{ki\theta}.$$

$F^{-1}: L^2[0, 2\pi] \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  transforma cada función en la sucesión de sus coeficientes de Fourier:

$$(F^{-1}f)_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ki\theta} d\theta.$$

## Isometría entre $\ell^2(\mathbb{Z})$ y $L^2(\mathbb{T})$



Vamos a denotar  $Fa$  con la misma letra  $a$ .

Escribimos  $a_k$  para los coeficientes y  $a(\theta)$  para la función.

## Ejemplo (un polinomio trigonométrico)

Consideremos la sucesión finita  $a$  con tres entradas no nulas:

$$a_{-1} = -1, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = -1.$$

$$a = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Al aplicar  $F$  obtenemos la función

$$\begin{aligned} a(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ki\theta} \\ &= -e^{-i\theta} + 2 - e^{i\theta} \\ &= 2 - 2\cos(\theta) \\ &= 4 \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

# Teorema de convolución

## Teorema

Sean  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ,  $y \in \ell^p(\mathbb{Z})$ . Entonces

$$F(x * y) = (Fx) (Fy).$$

En otras palabras, para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,

$$F(x * y)(\theta) = (Fx)(\theta) (Fy)(\theta).$$



# Diagonalización del operador de convolución

## Teorema

Sea  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . Entonces

$$F C(a) F^{-1} = M(a),$$

donde  $M(a)$  es el operador de multiplicación por  $a$  en  $L^2[0, 2\pi]$ .

# Diagonalización del operador de convolución

## Teorema

Sea  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . Entonces

$$F C(a) F^{-1} = M(a),$$

donde  $M(a)$  es el operador de multiplicación por  $a$  en  $L^2[0, 2\pi]$ .

## Corolario

$$\|C(a)\| = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |a(\theta)|, \quad \text{sp}(C(a)) = a([0, 2\pi]).$$

```
graph TD; A[Convolución de sucesiones] --> B[Matrices de Toeplitz]; B --> C[Ondas sobre un segmento discretizado];
```

Matrices de Toeplitz

Convolución de sucesiones

Ondas sobre un segmento discretizado

## Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} .$$

Suponemos que  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ .

También denotamos por  $a$  la serie de Fourier correspondiente:

$$a(\theta) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ki\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

La función  $a$  se llama el *símbolo generador* de las matrices

$$T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=0}^{n-1}.$$

La matriz  $T_n(a)$  es un corte finito de la matriz infinita  $C(a)$

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

$$T_3(a) = P_3 C(a) J_3 = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

# Análisis espectral de matrices de Toeplitz

Tres subclases principales:

- Matrices de Toeplitz autoadjuntas (el caso de símbolos reales).
- Matrices de Toeplitz no autoadjuntas, con símbolos complejos analíticos.
- Matrices de Toeplitz no autoadjuntas, con símbolos complejos no analíticos.

Hay avances para cada una de estas clases.

## Matrices de Toeplitz hermitianas

Consideremos el caso cuando el símbolo generador es real:

$$\forall \theta \in [0, 2\pi] \quad a(\theta) \in \mathbb{R}.$$

Esta condición es equivalente a la condición que

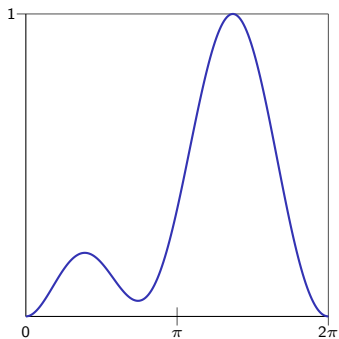
$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad a_{-k} = \overline{a_k}.$$

En este caso las matrices de Toeplitz  $T_n(a)$  son autoadjuntas.

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

# Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de  $a$



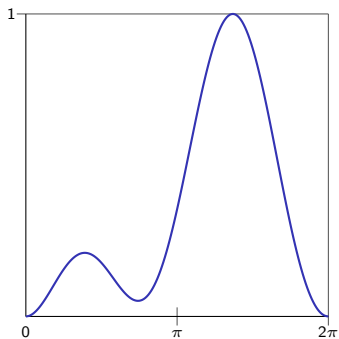
Valores propios de  $T_8(a)$





# Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de  $a$

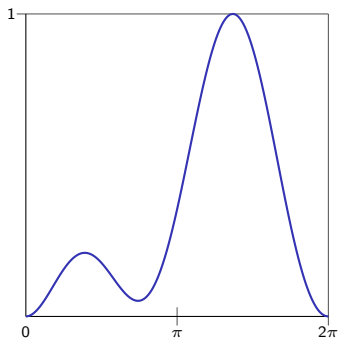


Valores propios de  $T_{16}(a)$



# Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de  $a$

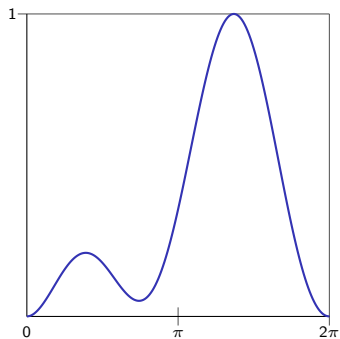


Valores propios de  $T_{32}(a)$

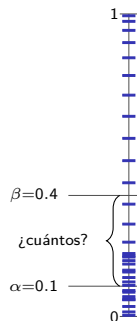


# Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de  $a$

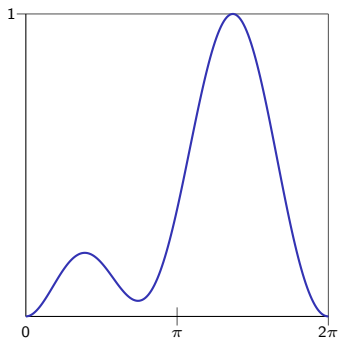


Valores propios de  $T_{32}(a)$

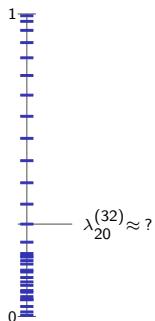


# Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de  $a$



Valores propios de  $T_{32}(a)$



# Matrices de Toeplitz tridiagonales simétricas $-1, 2, -1$



Gilbert Strang y su matriz favorita

## Matrices de Toeplitz tridiagonales simétricas $-1, 2, -1$

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

El símbolo generador:

$$a(\theta) = -e^{i\theta} + 2 - e^{-i\theta} = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

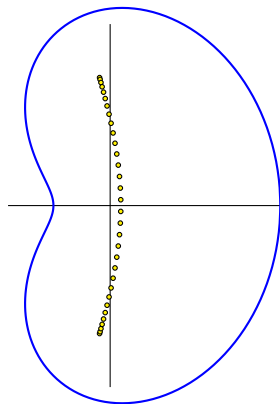
Valores propios:

$$\lambda_k^{(n)} = a\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

Vectores propios:

$$u_k^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[ \operatorname{sen} \frac{jk\pi}{n+1} \right]_{j=1}^n.$$

## Matrices de Toeplitz de banda no hermitianas

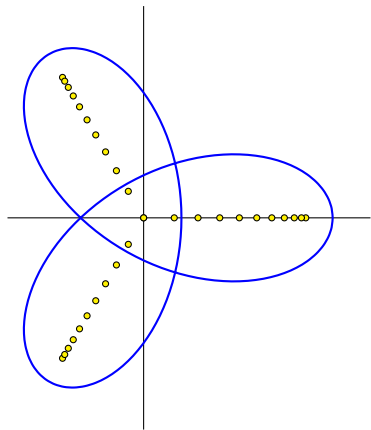


$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

La imagen del símbolo es una curva en  $\mathbb{C}$ .

Schmidt y Spitzer mostraron que los espectros de  $T_n(a)$  se concentran cerca de cierto “esqueleto” de la curva.

## Matrices de Toeplitz tetradiagonales no hermitianas

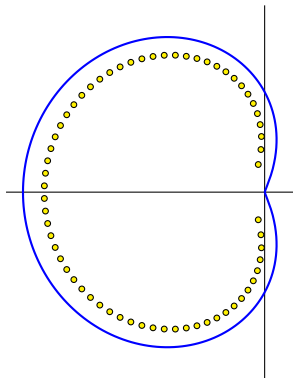


$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & a_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_0 & a_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & a_0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Juntos con Sergei Grudsky, Román Higuera García y Fidel Vásquez Rojas, describimos los valores y vectores propios para un ejemplo de esta clase.



# Matrices de Toeplitz no hermitianas con símbolos no analíticos

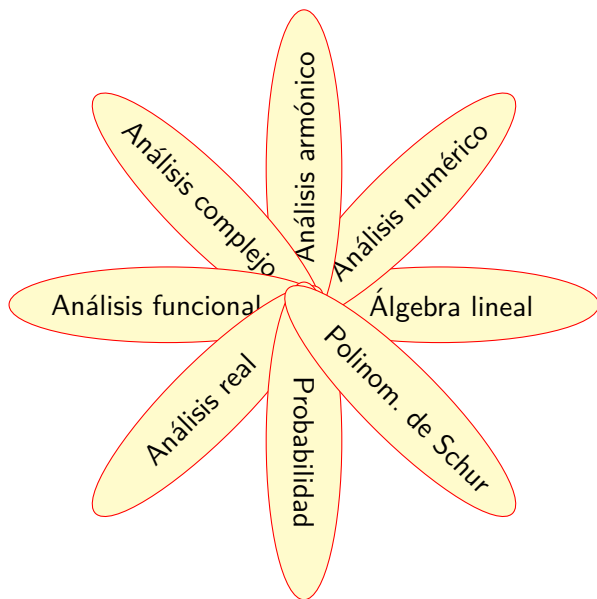


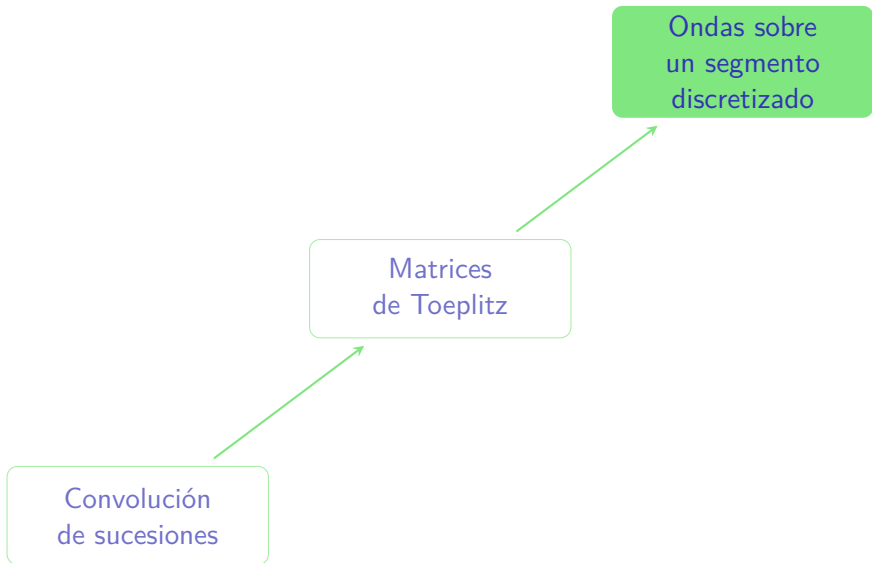
Conjetura de Widom (1990's):  
los espectros se concentran  
cerca de la curva  $a([0, 2\pi])$ .

Day, Geary, Kadanoff (2009):  
conjetura sobre los autovalores  
y autovectores en un caso particular.

Bogoya, Böttcher, Grudsky, M. (2012):  
fórmulas más precisas para una subclase.

## La teoría de matrices de Toeplitz utiliza varias áreas

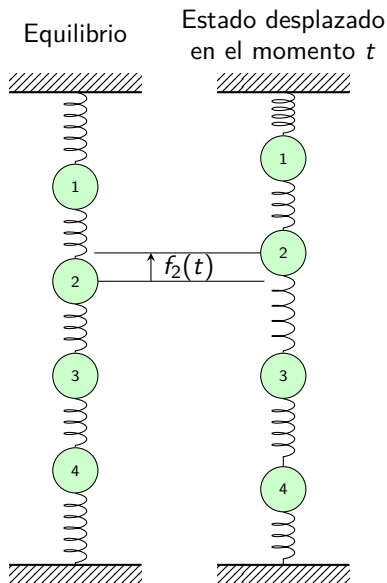




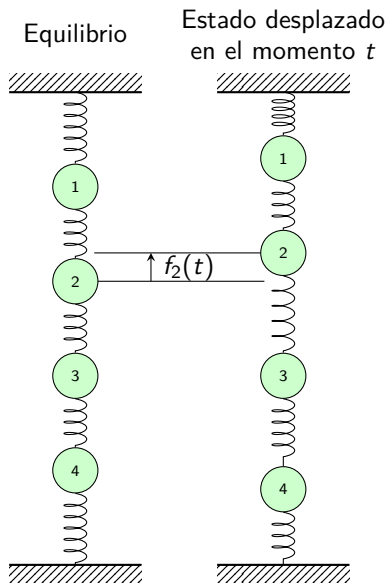
Agradezco al profesor Luis Alberto Cisneros Ake (ESFM del IPN) por la idea del siguiente ejemplo de aplicación de matrices de Toeplitz.

Empezamos a estudiar temas cercanos con Gabino Sánchez Arzate.

# Sistema de masas y resortes (ondas de presión discretas)



# Sistema de masas y resortes (ondas de presión discretas)



Newton + Hooke:

$$m f_j''(t) = -\delta(f_{j-1}(t) - f_j(t)) - \delta(f_{j+1}(t) - f_j(t)).$$

Ponemos  $c = \sqrt{\delta/m}$  y simplificamos:

$$f_j''(t) = -c^2(-f_{j-1}(t) + 2f_j(t) - f_{j+1}(t)).$$

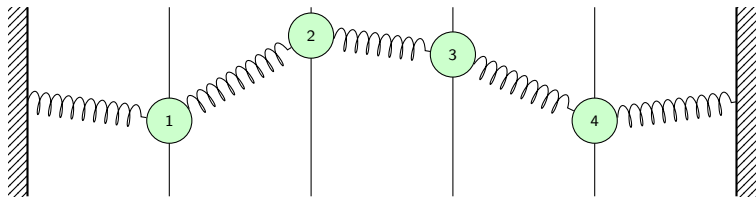
Condiciones de frontera:

$$f_0(t) = f_5(t) = 0.$$

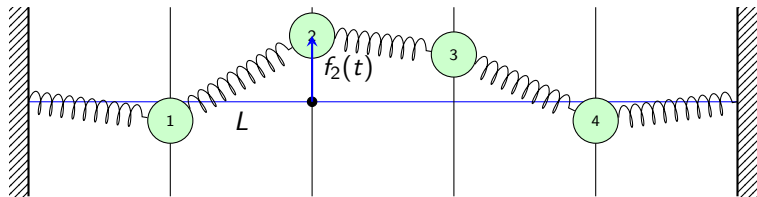
Condiciones iniciales:

$$f(0) \text{ dado, } f'(0) = 0_n.$$

## Sistema de masas y resortes (ondas transversales discretas)

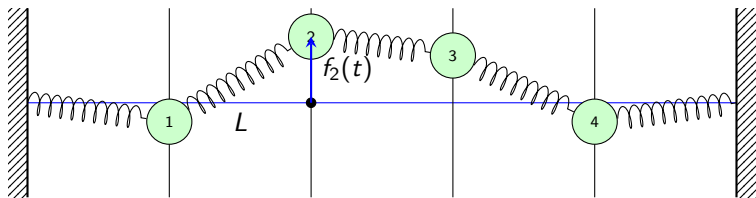


# Sistema de masas y resortes (ondas transversales discretas)





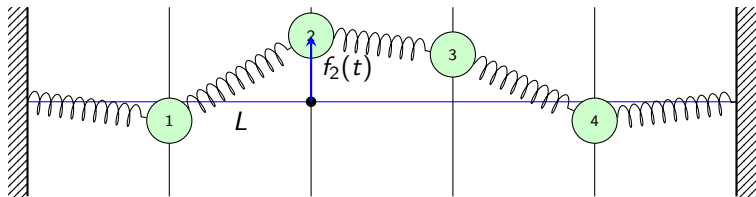
## Sistema de masas y resortes (ondas transversales discretas)



Calculamos la fuerza entre las masas 1 y 2 en el momento de tiempo  $t$ :

$$\delta \left( \sqrt{L^2 + (f_2(t) - f_1(t))^2} - L \right) \approx \frac{\delta}{2} |f_2(t) - f_1(t)|.$$

## Sistema de masas y resortes (ondas transversales discretas)



Calculamos la fuerza entre las masas 1 y 2 en el momento de tiempo  $t$ :

$$\delta \left( \sqrt{L^2 + (f_2(t) - f_1(t))^2} - L \right) \approx \frac{\delta}{2} |f_2(t) - f_1(t)|.$$

Así se deduce un sistema de ecuaciones diferenciales de la misma forma:

$$f_j''(t) = -c^2(-f_{j-1}(t) + 2f_j(t) - f_{j+1}(t)).$$

## Sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{bmatrix} f_1''(t) \\ f_2''(t) \\ f_3''(t) \\ f_4''(t) \end{bmatrix} = -c^2 \begin{bmatrix} 2f_1(t) & -f_2(t) & & \\ -f_1(t) & +2f_2(t) & -f_3(t) & \\ & -f_2(t) & +2f_3(t) & -f_4(t) \\ & & -f_3(t) & +2f_4(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} f_1''(t) \\ f_2''(t) \\ f_3''(t) \\ f_4''(t) \end{bmatrix} = -c^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix},$$

$$f''(t) = -c^2 T_n f(t).$$

La matriz de Toeplitz  $T_n = T_n(a)$  está generada por  $a(\theta) = 4 \sin^2(\theta/2)$ .

## Descomposición espectral de $T_n$ (repass)

$$T_n u_j^{(n)} = \lambda_j^{(n)} u_j^{(n)},$$

donde

$$\lambda_j^{(n)} = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{n+1}, \quad u_j^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[ \operatorname{sen} \frac{jk\pi}{n+1} \right]_{k=1}^n.$$

En otras palabras,

$$T_n = S_n \operatorname{diag}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}) S_n,$$

donde  $S_n$  es la matriz de la Transformada Discreta de Seno:

$$S_n = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[ \operatorname{sen} \frac{jk\pi}{n+1} \right]_{j,k=1}^n.$$

## Solución del sistema de ecuaciones diferenciales

En el sistema  $f''(t) = -c^2 T_n f(t)$  hacemos el cambio  $f(t) = S_n g(t)$ .

## Solución del sistema de ecuaciones diferenciales

En el sistema  $f''(t) = -c^2 T_n f(t)$  hacemos el cambio  $f(t) = S_n g(t)$ .  
Entonces la función vectorial  $g$  satisface

$$g(0) = S f(0), \quad g'(0) = S f'(0) = 0_n,$$

y

$$g''(t) = -c^2 \operatorname{diag}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}) g(t).$$

Ahora las ecuaciones no son acopladas y se resuelven fácilmente:

$$g_j''(t) = -c^2 \lambda_j^{(n)} g_j(t),$$

## Solución del sistema de ecuaciones diferenciales

En el sistema  $f''(t) = -c^2 T_n f(t)$  hacemos el cambio  $f(t) = S_n g(t)$ . Entonces la función vectorial  $g$  satisface

$$g(0) = S f(0), \quad g'(0) = S f'(0) = 0_n,$$

y

$$g''(t) = -c^2 \operatorname{diag}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}) g(t).$$

Ahora las ecuaciones no son acopladas y se resuelven fácilmente:

$$g_j''(t) = -c^2 \lambda_j^{(n)} g_j(t),$$

$$g_j(t) = g_j(0) \cos(\omega_j t),$$

donde  $\omega_j = c \sqrt{\lambda_j^{(n)}} = 2c \operatorname{sen} \frac{j\pi}{n+1}$ . Finalmente

$$f(t) = S g(t) = \sum_{j=1}^n g_j(0) \cos(\omega_j t) u_j^{(n)}.$$