

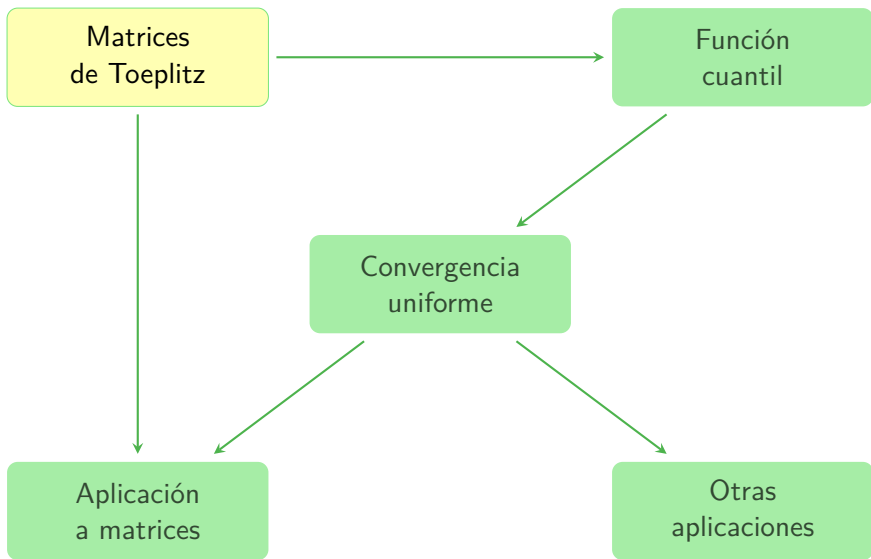
# Función cuantil y aproximación uniforme de los valores propios de matrices de Toeplitz

Egor Maximenko

utilizando trabajos juntos con Johan Manuel Bogoya,  
Albrecht Böttcher y Sergei Grudsky

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

14 de Octubre de 2015



# Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} .$$

## Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} .$$

Suponemos que  $a_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) son los coeficientes de Fourier de una función  $a \in L^\infty(0, 2\pi)$ :

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) e^{-ki\theta} d\theta.$$

La función  $a$  se llama el *símbolo generador* de las matrices

$$T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n.$$

La matriz  $T_n(a)$  es un corte finito del operador de convolución

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdot$$

$$T_3(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \cdot$$

## Diagonalización del operador de convolución

$C(a) :=$  el operador de convolución con la convolución  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ :

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (C(a)x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

## Diagonalización del operador de convolución

$C(a) :=$  el operador de convolución con la convolución  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ :

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (C(a)x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

$\mathcal{F} :=$  la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

## Diagonalización del operador de convolución

$C(a) :=$  el operador de convolución con la convolución  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ :

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (C(a)x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

$\mathcal{F} :=$  la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a) :=$  es el operador de multiplicación por la función  $a$ :

$$M(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$



## Diagonalización del operador de convolución

$C(a) :=$  el operador de convolución con la convolución  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ :

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (C(a)x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

$\mathcal{F} :=$  la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a) :=$  es el operador de multiplicación por la función  $a$ :

$$M(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$

Por el teorema de convolución,

$$\mathcal{F}C(a)\mathcal{F}^{-1} = M(a).$$

## Propiedades espectrales de $C(a)$ y $T_n(a)$

De la fórmula

$$\mathcal{F}C(a)\mathcal{F}^{-1} = M(a)$$

se sigue que

$$\|C(a)\| = \|a\|_\infty, \quad \text{sp}(C(a)) = \mathcal{R}(a).$$

El objetivo es describir propiedades asintóticas de  $T_n(a)$ , en particular, el comportamiento asintótico de sus valores propios. Los ordenamos de manera ascendente:

$$\lambda_1^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)}.$$

## Matrices de Toeplitz autoadjuntas

Suponemos que el símbolo generador es acotado y real:

$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R}).$$

En este caso las matrices  $T_n(a)$  son hermíticas:

$$a_{-k} = \overline{a_k}, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$



stealed from  
[loveiscomix.com](http://loveiscomix.com)



$$\begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$



*Entender a una matriz autoadjunta es...*

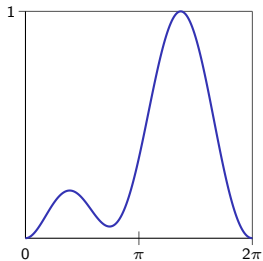
$$\begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$



***Entender a una matriz autoadjunta es...***  
*... entender el comportamiento de sus*  
***valores y vectores propios.***

# Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de  $a$

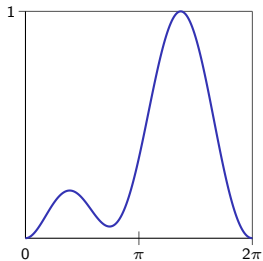


Valores propios de  $T_8(a)$



# Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de  $a$



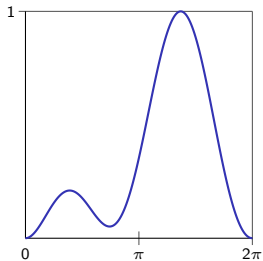
Valores propios de  $T_{16}(a)$





# Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de  $a$

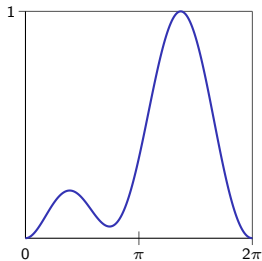


Valores propios de  $T_{32}(a)$

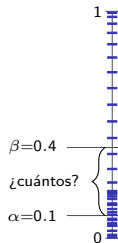


# Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de  $a$



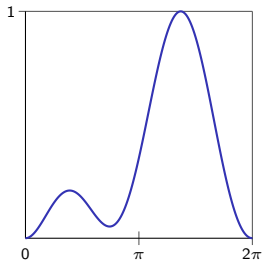
Valores propios de  $T_{32}(a)$



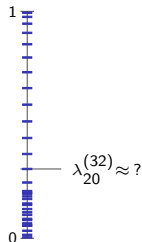
Primera pregunta:  $\#\{j: \lambda_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$  (Szegő)

# Valores propios de matrices de Toeplitz

Gráfica de  $a$



Valores propios de  $T_{32}(a)$



Primera pregunta:  $\#\{j: \lambda_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$  (Szegő)

Segunda pregunta:  $\lambda_j^{(n)} \approx ?$

$T_n(a)T_n(b) \approx T_n(ab)$  en cierto sentido

Denotemos por  $\|\cdot\|_F$  a la norma de Frobenius.

### Lema

Sean  $a, b: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  funciones suaves. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \|T_n(a)T_n(b) - T_n(ab)\|_F \right) = 0.$$

# Teorema de Szegő

$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

$$\varphi \in C(\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a(\theta)) d\theta$$

# Corolario del teorema límite de Szegő

distribución de los valores propios de matrices de Toeplitz

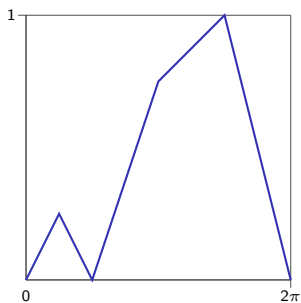
$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

$$\alpha < \beta \\ a \neq \alpha, \beta \quad \text{c.t.p.}$$

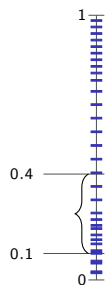
$$\frac{\#\{j: \alpha \leq \lambda_j^{(n)} \leq \beta\}}{n} \longrightarrow \frac{\mu_{\mathbb{R}} \{\theta \in [0, 2\pi]: \alpha \leq a(\theta) \leq \beta\}}{2\pi}$$

# Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de  $a$

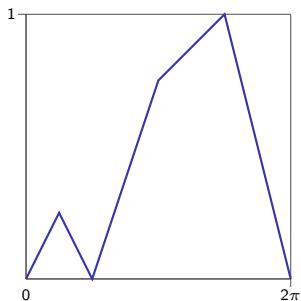


Valores propios de  $T_{32}(a)$

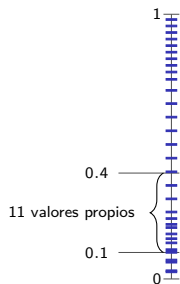


## Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de  $a$



Valores propios de  $T_{32}(a)$

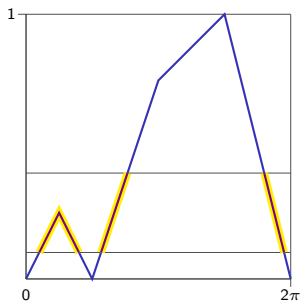


$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

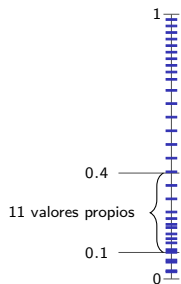


# Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de  $a$



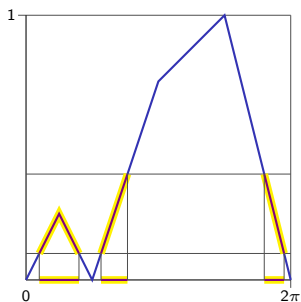
Valores propios de  $T_{32}(a)$



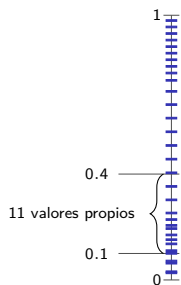
$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

# Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de  $a$



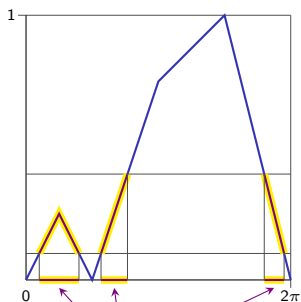
Valores propios de  $T_{32}(a)$



$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

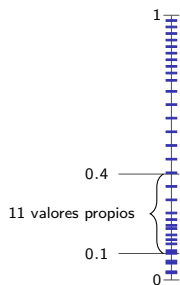
# Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de  $a$



$$\frac{\mu_{\mathbb{R}} \{ \theta : 0.1 \leq a(\theta) \leq 0.4 \}}{2\pi} = 0.325$$

Valores propios de  $T_{32}(a)$

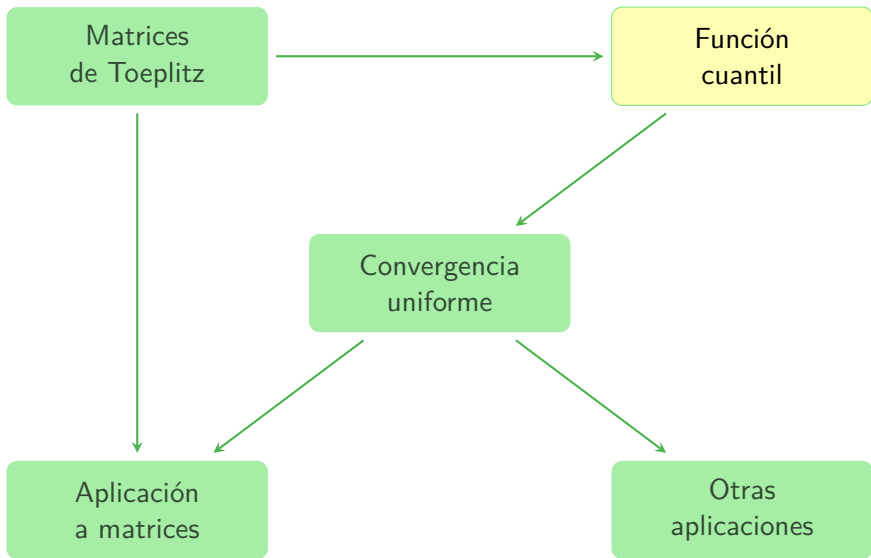


$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

Szegő describió la distribución asintótica de los valores propios de  $T_n(a)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Otra pregunta se quedó sin respuesta:

$$\lambda_j^{(n)} \approx ?$$



# Función cuantil asociada a una medida de probabilidad de Borel sobre $\mathbb{R}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) :=$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{PM}(\mathbb{R}) :=$  el conjunto de las medidas de probabilidad  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  tales que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ .

Dada  $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ , se definen:

la **función de distribución acumulada**  $F_{\mu}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,

$$F_{\mu}(v) := \mu(-\infty, v],$$

la **función cuantil**  $Q_{\mu}: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$Q_{\mu}(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_{\mu}(v) \geq p\}.$$

## Soporte de una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$

Dada  $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ , su soporte  $\text{supp}(\mu)$  es

$$\text{supp}(\mu) := \{v \in \mathbb{R} : \mu(v - \varepsilon, v + \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\}.$$

Si  $\mu$  tiene soporte acotado, entonces

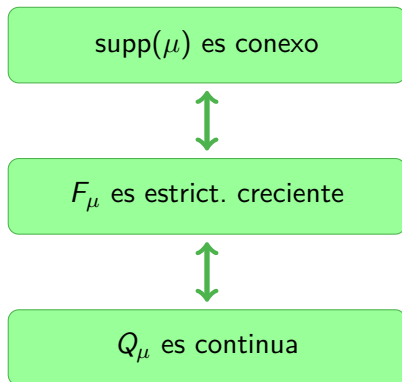
$$Q_\mu(0^+) = \inf(\text{supp}(\mu)), \quad Q_\mu(1^-) = \sup(\text{supp}(\mu)),$$

y en este caso extendemos  $Q_\mu$  a  $[0, 1]$  por continuidad.

## Criterio de continuidad de la función cuantil

Sea  $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$  con soporte acotado.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:





## Función cuantil asociada a una variable aleatoria

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad, y sea  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\mathcal{F}$ -medible.

Le asociamos la *medida imagen* (pushforward measure)  $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ ,

$$\mu(B) := P(X^{-1}(B)).$$

Aplicando las definiciones anteriores a este caso, definimos el rango esencial de  $X$ , la función de distribución y la función cuantil:

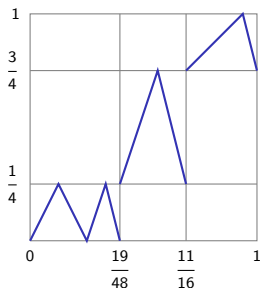
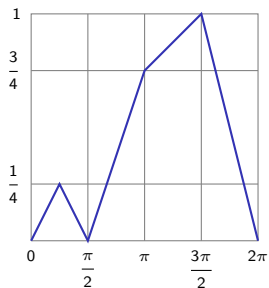
$$\mathcal{R}(X) := \{v \in \mathbb{R} : P(X^{-1}(v - \varepsilon, v + \varepsilon)) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\},$$

$$F_X(v) := P(X^{-1}(-\infty, v]),$$

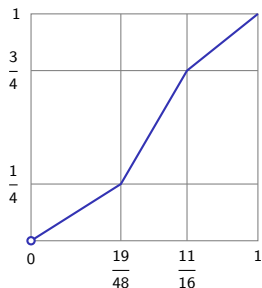
$$Q_X(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_X(v) \geq p\}.$$

# Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de  $a$

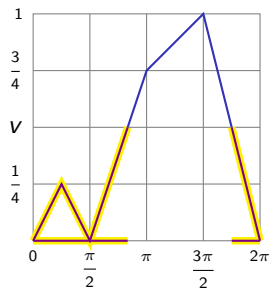


Gráfica de  $Q_a$

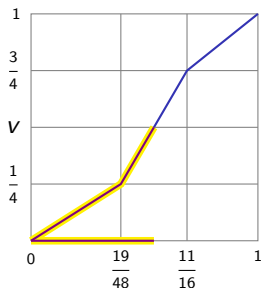
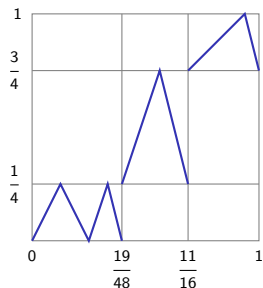


# Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de  $a$



Gráfica de  $Q_a$

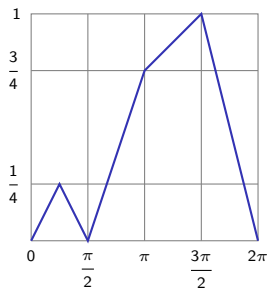


$a$  y  $Q_a$  son idénticamente distribuidas:

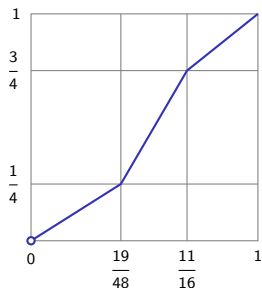
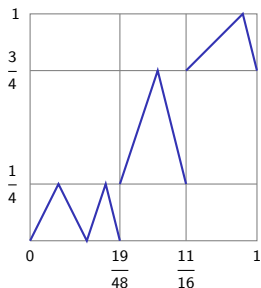
$$\frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}} \{ \theta \in [0, 2\pi] : a(\theta) \leq v \} = \mu_{\mathbb{R}} \{ p \in [0, 1] : Q_a(p) \leq v \}$$

# Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de  $a$



Gráfica de  $Q_a$



$a$   $\xrightarrow{\text{reordenamiento en el estilo de Lebesgue}}$   $Q_a$

## Medida asociada a una lista de números reales

Sea  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  una lista de números reales.

Le asociamos la medida de conteo normalizada  $\mu$ :

$$\mu(B) = \frac{\#\{j \in \{1, \dots, d\} : \alpha_j \in B\}}{d} \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

En otras palabras,  $\mu$  es el promedio aritmético de las medidas de Dirac concentradas en los puntos  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ .

Si la lista  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  es ordenada de manera ascendente, entonces

$$F_\mu(v) = \frac{\max\{j \in \{1, \dots, d\} : \alpha_j \leq v\}}{d}$$

y

$$Q_\mu(j/d) = \alpha_j.$$

## Función cuantil de una lista de números



Los mismos números en el orden ascendente:



$$\text{QuantileFunction}(1/3) = 118$$

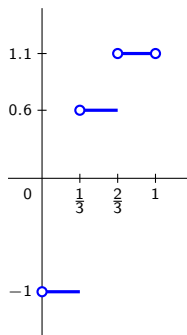
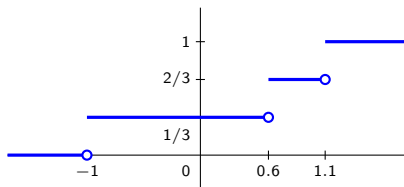
porque 118 es el número más pequeño entre los números  $v$  tales que al menos  $1/3$  de los elementos son menores o iguales a  $v$ .

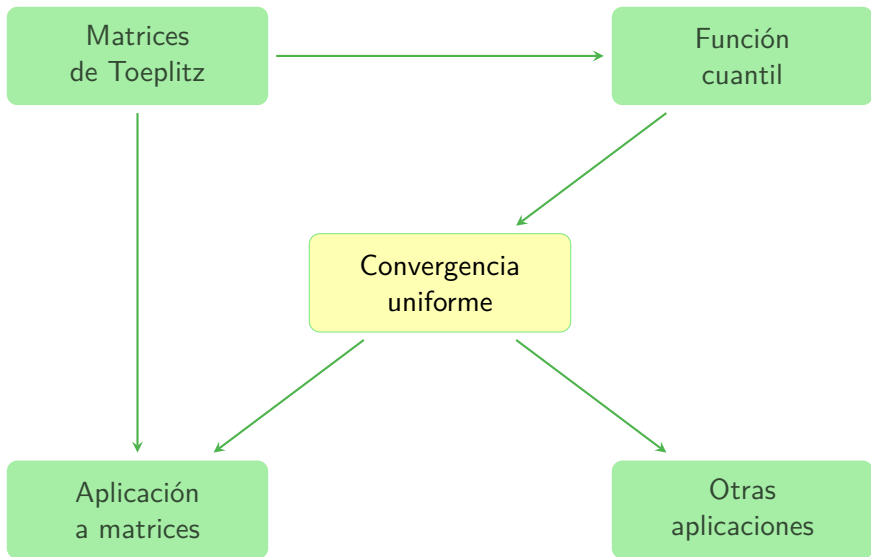
## Otro ejemplo

Consideremos una lista de tres números reales:

$$X = (-1, 0.6, 1.1).$$

Los dibujos muestran la función de distribución y la función cuantil:







## Puntos de continuidad de una función

Sean  $X, Y$  algunos espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función.

$$\mathcal{C}(f) := \{x \in X : f \text{ es continua en } x\}.$$

Por ejemplo, si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x \rfloor}{1 + x^2},$$

entonces

$$\mathcal{C}(f) =$$

## Puntos de continuidad de una función

Sean  $X, Y$  algunos espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función.

$$\mathcal{C}(f) := \{x \in X : f \text{ es continua en } x\}.$$

Por ejemplo, si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x \rfloor}{1 + x^2},$$

entonces

$$\mathcal{C}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

## Criterio de convergencia en distribución ( $\mu_n \rightsquigarrow \Lambda$ )

Sea  $\Lambda \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$  y sea  $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $\mathcal{PM}(\mathbb{R})$ .  
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\Lambda$$



$$\forall v \in \mathcal{C}(F_{\Lambda}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu_n}(v) = F_{\Lambda}(v)$$



$$\forall p \in \mathcal{C}(Q_{\Lambda}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\mu_n}(p) = Q_{\Lambda}(p)$$

## Lema sobre la convergencia uniforme

$$f_n(p) \rightarrow g(p) \\ \forall p \in [0, 1]$$

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \text{ son crecientes}$$

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ g \text{ es continua}$$

$$f_n \xrightarrow{[0,1]} g$$

# Teorema (resultado principal)

$$\mu_n \rightsquigarrow \Lambda$$

$$\begin{aligned} \mu_n &\in \mathcal{PM}(\mathbb{R}) \\ \text{supp}(\mu_n) &\subseteq [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &\in \mathcal{PM}(\mathbb{R}) \\ \text{supp}(\Lambda) &= [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

$$Q_{\mu_n} \xrightarrow{[0,1]} Q_{\Lambda}$$

# Distribución asintótica de una sucesión de tuplas

Sean:

$\alpha = \left( \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{d(n)}^{(n)} \right)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de tuplas de números reales, donde la sucesión de las longitudes tiende a infinito:  $d(n) \rightarrow \infty$ .

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad;

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\mathcal{F}$ -medible.

Se dice que  $\alpha$  es **asintóticamente distribuida** como  $(X, P)$  si para cada  $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d(n)} \sum_{j=1}^{d(n)} \varphi(\alpha_j^{(n)}) = \int_{\Omega} \varphi \circ X dP.$$

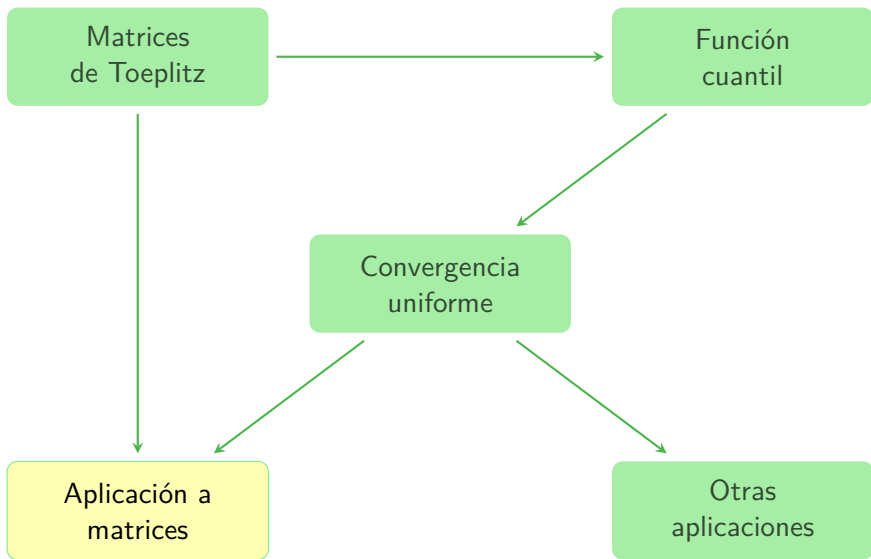
## Teorema: de la distribución asintótica de tuplas a la convergencia uniforme

Supongamos que

- $\alpha = (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{d(n)}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de tuplas en  $\mathbb{R}$ .
- $\alpha$  es asintóticamente distribuida como  $(X, P)$ .
- $\mathcal{R}(X)$  es conexo y acotado.
- $\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{d(n)}^{(n)}$  están en  $\mathcal{R}(X)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- $\alpha_1^{(n)} \leq \alpha_2^{(n)} \leq \dots \leq \alpha_{d(n)}^{(n)}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq d(n)} |\alpha_j^{(n)} - Q_{\wedge}(j/d(n))| = 0.$$





## Convergencia uniforme de los valores propios

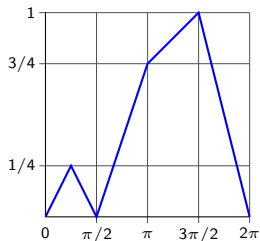
$$a \in L^\infty(0, 2\pi)$$

$$\mathcal{R}(a) = [\alpha, \beta]$$

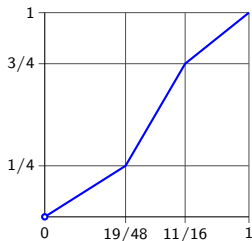
$$\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j^{(n)} - Q_a(j/n)| \longrightarrow 0$$

# Ejemplo

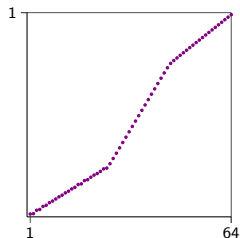
Gráfica de  $a$



Gráfica de  $Q_a$



Val. prop. de  $T_{64}(a)$

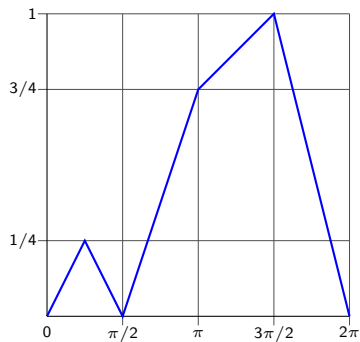


Cada valor propio  $\lambda_j^{(n)}$  se muestra como el punto  $\left(\frac{j}{n}, \lambda_j^{(n)}\right)$ .

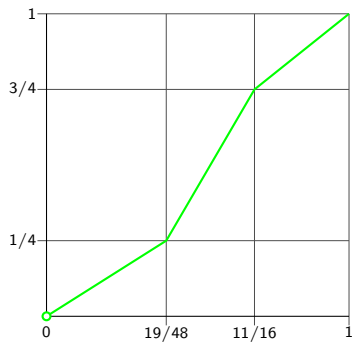
Se ve que el tercer dibujo parece mucho al segundo.

# Ejemplo

Gráfica de  $a$

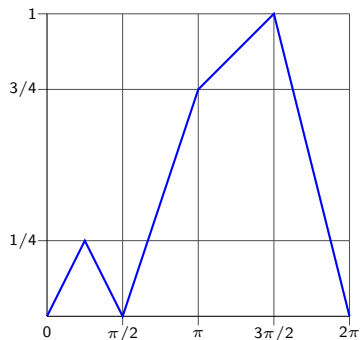


Gráfica de  $Q_a$

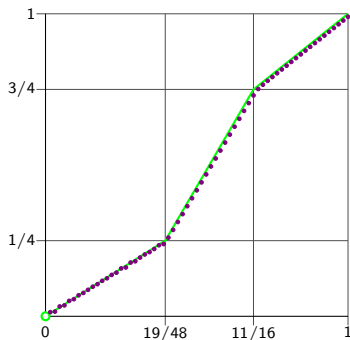


# Ejemplo

Gráfica de  $a$



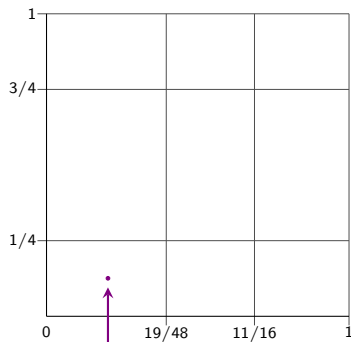
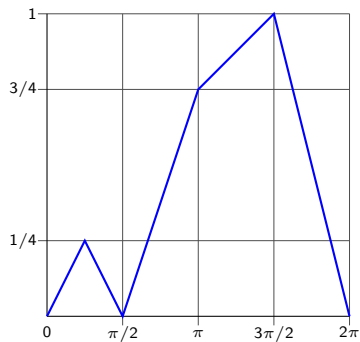
Gráfica de  $Q_a$



y los puntos  $(j/n, \lambda_j^{(n)})$

# Ejemplo

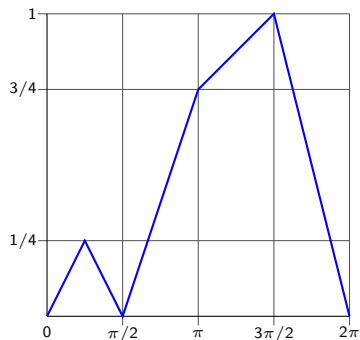
Gráfica de  $a$



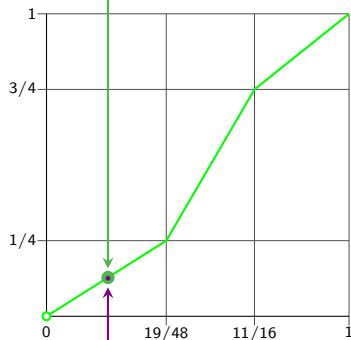
$$\left(\frac{13}{64}, \lambda_{13}^{(64)}\right)$$

# Ejemplo

Gráfica de  $a$



$$\left( \frac{13}{64}, Q_a \left( \frac{13}{64} \right) \right)$$



$$\left( \frac{13}{64}, \lambda_{13}^{(64)} \right)$$



El teorema límite de Szegő  
combinado con el concepto de función cuantil  
nos proporciona el término principal  
de la asintótica de los valores propios:

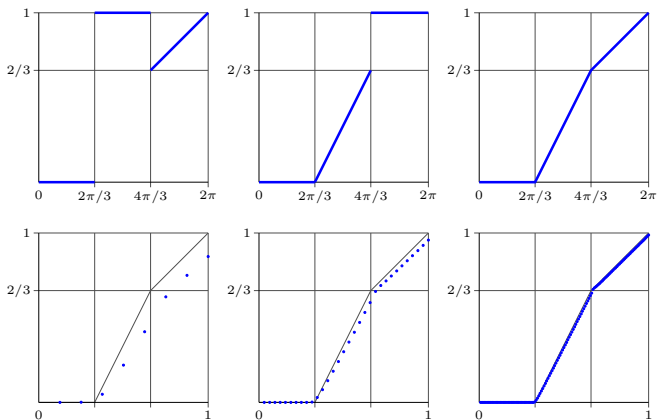
$$\lambda_j^{(n)} \approx Q_a\left(\frac{j}{n}\right)$$

suponiendo que  $\mathcal{R}(a) = [\alpha, \beta]$ .



# Valores singulares de productos de matrices de Toeplitz

Los dibujos de arriba muestran los símbolos  $a$ ,  $b$ ,  $ab$ .



Dibujos de abajo: los valores singulares de  $T_n(a)T_n(b)$ ,  $n = 8, 32, 128$ , como puntos con coordenadas  $(j/n, s_j^{(n)})$ , y la función cuantil de  $ab$ .

# Antecedentes



Fabio Di Benedetto, Giuseppe Fiorentino, Stefano Serra (1993):  
C. G. Preconditioning for Toeplitz matrices.  
[doi:10.1016/0898-1221\(93\)90297-9](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90297-9)

Demostraron la convergencia puntual,  
suponiendo que  $a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$  y que  $F_a$  es continua.

## Antecedentes



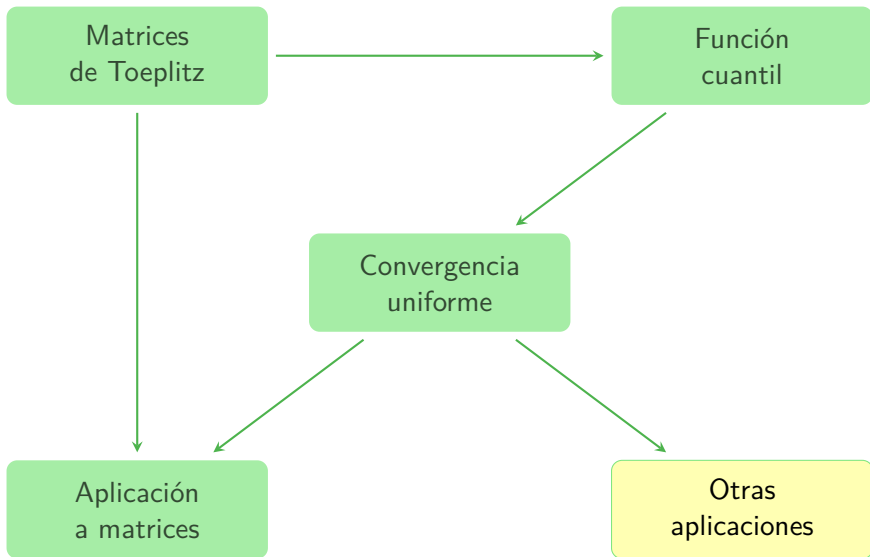
Fabio Di Benedetto, Giuseppe Fiorentino, Stefano Serra (1993):  
C. G. Preconditioning for Toeplitz matrices.  
[doi:10.1016/0898-1221\(93\)90297-9](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90297-9)

Demostraron la convergencia puntual,  
suponiendo que  $a \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$  y que  $F_a$  es continua.



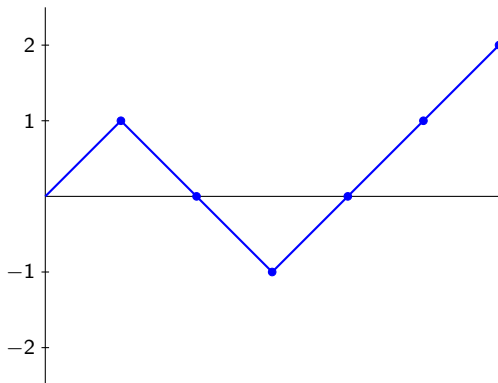
William Trench (2012):  
An elementary view of Weyl's theory of equal distribution.  
[doi:10.4169/amer.math.monthly.119.10.852](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.119.10.852)

Demostró la convergencia en promedio.



## Caminatas aleatorias discretas

El propósito de este ejemplo es “voltear” (volver del revés) la famosa ley de arcoseno que descubrió P. Lévy en 1939.



Para cada trayectoria  $w$  de longitud  $n$  sea  $G_n(w)$  la porción del camino con valores positivos. En el dibujo,

$$G_6(w) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

## Caminatas aleatorias, $n = 3$

$w$	sumas parciales	$G_3(w)$
$-1, -1, -1$	$-1, -2, -3$	0
$-1, -1, 1$	$-1, -2, -1$	0
$-1, 1, -1$	$-1, 0, -1$	0
$-1, 1, 1$	$-1, 0, 1$	$1/3$
$1, -1, -1$	$1, 0, -1$	$1/3$
$1, -1, 1$	$1, 0, 1$	$2/3$
$1, 1, -1$	$1, 2, 1$	1
$1, 1, 1$	$1, 2, 3$	1

Sea  $\alpha^{(3)} = (\alpha_1^{(3)}, \dots, \alpha_8^{(3)})$  la lista de números  $G_3(w)$ ,  $w \in \{-1, 1\}^3$ , después de ordenarlos de manera ascendente:

$$\left(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1\right).$$

## Caminatas aleatorias, $n$ general

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y cada  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \{-1, 1\}^n$  ponemos

$$G_n(w) = \frac{\#\{k \in \{1, \dots, n\} : w_1 + \dots + w_k > 0\}}{n}.$$

Denotamos por  $\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{2^n}^{(n)})$  a la lista de los números  $G_n(w)$ ,  $w \in \{-1, 1\}^n$ , escrita en el orden ascendente.

## La ley de arcoseno de Lévy

La sucesión de  $n$ -tuplas  $\alpha^{(n)}$  es asintóticamente distribuida como  $(X, P)$ , donde  $P$  es la medida de Lebesgue en  $[0, 1]$  y

$$X(v) := \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{v}.$$

En este caso la función cuantil es

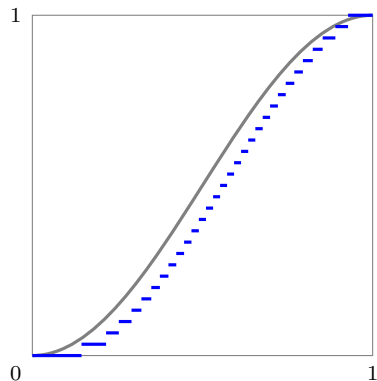
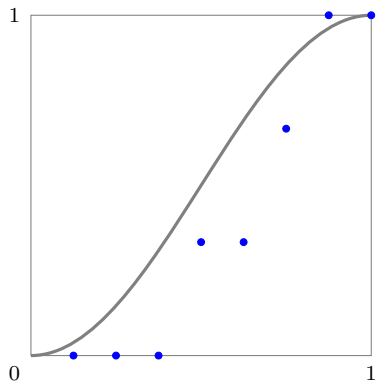
$$Q_X(p) = \sin^2 \frac{\pi p}{2}.$$

Nuestro corolario de la ley de arcoseno es la siguiente convergencia uniforme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq 2^n} \left| \alpha_j^{(n)} - \sin^2 \frac{\pi j}{2^{n+1}} \right| = 0.$$



## Gráficas para $n = 3$ y para $n = 2^{30}$



Los puntos azules son  $(j/2^n, \alpha_j^{(n)})$ ,  $j = 1, \dots, 2^n$ .

La línea gris es la gráfica  $Q_X(p) = \sin^2 \frac{\pi p}{2}$ .

## Errores uniformes

Para cada  $n$  denotemos por  $\varepsilon^{(n)}$  al error uniforme:

$$\varepsilon^{(n)} := \max_{1 \leq j \leq 2^n} \left| \alpha_j^{(n)} - \sin^2 \frac{\pi j}{2^{n+1}} \right| = 0.$$

La siguiente tabla muestra que la convergencia es bastante lenta:

$n$	5	10	15	20	25	30
$\varepsilon^{(n)}$	0.300	0.209	0.164	0.144	0.126	0.116

## Otra aplicación: sucesiones reales asintóticamente distribuidas

Sea  $\Lambda$  una medida de probabilidad de Borel en  $\mathbb{R}$ ,  
tal que  $\text{supp}(\Lambda)$  es conexo y acotado,  
y sea  $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$  una sucesión en  $\mathbb{R}$ .

Supongamos que  $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$  es asintóticamente distribuida como  $\Lambda$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{j \in \{1, \dots, n\} : \beta_j \leq v\}}{n} = F_{\Lambda}(v).$$

Denotemos por  $(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)})$  a la lista  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  ordenada.  
Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j^{(n)} - Q_{\Lambda}(j/n)| = 0.$$

## Caso particular: sucesiones uniformemente distribuidas

Si  $F(v) = v$  en  $[0, 1]$ , entonces  $Q(p) = p$  en  $[0, 1]$ , y

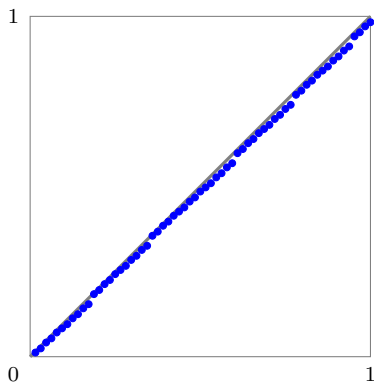
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j^{(n)} - j/n| = 0.$$

Por ejemplo, sea

$$\beta_j = j\sqrt{2} - \lfloor j\sqrt{2} \rfloor.$$

Por el Teorema de Equidistribución de Weyl,  $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$  es uniformemente distribuida en  $[0, 1]$ .

Ejemplo  $\beta_j = j\sqrt{2} - \lfloor j\sqrt{2} \rfloor$



Las abscisas de los puntos azules son  $j/64$ ,  $j = 1, \dots, 64$ .

Las ordenadas de los puntos azules son los números  $j\sqrt{2} - \lfloor j\sqrt{2} \rfloor$ ,  
ordenados de manera ascendente.

La línea gris es la gráfica de la función identidad en  $[0, 1]$ .

## Errores uniformes

$$\varepsilon^{(n)} := \max_{1 \leq j \leq n} \left| \alpha_j^{(n)} - \frac{j}{n} \right|.$$

$n$	32	64	128	256	512
$\varepsilon^{(n)}$	$4.6 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$

Para  $n \leq 10000$  obtuvimos  $\varepsilon^{(n)} \leq \frac{0.7 \ln(n)}{n}$ .

¡Gracias!