Convolución sobre los enteros

Egor Maximenko

para un proyecto conjunto con

Víctor Hugo Ibarra Mercado,
Eliseo Sarmiento Rosales y José Eliud Silva Urrutia

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

30 de Julio de 2015

Convolución de sucesiones

Convolución y series de Fourier

Sucesiones bilaterales

¿Cómo surgen convoluciones?

Matrices de Toeplitz

Sucesiones bilaterales

Una sucesión bilateral es una función $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{cccccccc} & \ldots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \ldots \\ a\colon & \ldots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ & \ldots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \end{array}$$

$$a = (\ldots,\ a_{-3},\ a_{-2},\ a_{-1},\ \overset{\overset{0}{\downarrow}}{a_0},\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots).$$

Por ejemplo, si $a_j = j^2 + 10$, entonces

$$a = \left(\ldots,\ 19,\ 14,\ 11,\ \overset{\overset{0}{\downarrow}}{10},\ 11,\ 14,\ 19,\ \ldots\right).$$

Extensión de sucesiones unilaterales a bilaterales

Dada una sucesión unilateral $a\colon \{0,1,2,\ldots\} \to \mathbb{C}$,

$$(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots),$$

la identificamos con la siguiente sucesión bilateral:

$$(\ldots,\ 0,\ 0,\ \underset{\substack{0\\ \downarrow}}{a_0},\ a_1,\ a_2,\ \ldots).$$

Extensión de vectores a sucesiones

Dado un vector del espacio $\mathbb{C}^n$,

$$(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}),$$

lo identificamos con la sucesión bilateral

$$(\ldots,\ 0,\ 0,\ \overset{\overset{0}{\downarrow}}{a_0},\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

Sucesiones básicas

Sea $p \in \mathbb{Z}$. Definimos $e_p \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$(e_p)_j = \delta_{p,j} = \begin{cases} 1, & j = p; \\ 0, & j \neq p. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$e_{-1} = (\ldots,\ 0,\ 1,\ \overset{\overset{0}{\downarrow}}{0},\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$

$$e_2 = (\ldots,\ 0,\ 0,\ \overset{\overset{0}{\downarrow}}{0},\ 0,\ 1,\ 0, \ldots).$$

El soporte de una sucesión

Dada una sucesión $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, su soporte se define como

$$\operatorname{supp}(a) := \{\, j \in \mathbb{Z}:\ \ a_j \neq 0 \,\}.$$

Por ejemplo, si

$$a_j = 1 + (-1)^j,$$

entonces

$$a = (\ldots,\ 0,\ 2,\ 0,\ \overset{\overset{0}{\downarrow}}{2},\ 0,\ 2,\ 0,\ \ldots),$$

y

$$\operatorname{supp}(a) = \{\ldots,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ \ldots\} = 2\mathbb{Z}.$$

Sucesiones de soporte finito

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

$$A \text{ es finito} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ es acotado} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ es compacto.}$$

$\Phi(\mathbb{Z}) :=$ el espacio vectorial de las sucesiones de soporte finito.

Por ejemplo, la siguiente sucesión pertenece a $\Phi(\mathbb{Z})$:

$$a = (\ldots,\ 0,\ 0,\ 5,\ \overset{\overset{0}{\downarrow}}{6},\ 0,\ -4,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$

porque su soporte es $\operatorname{supp}(a) = \{-1, 0, 2\}$.

Sucesiones sumables y cuadrado sumables

Dada una sucesión $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

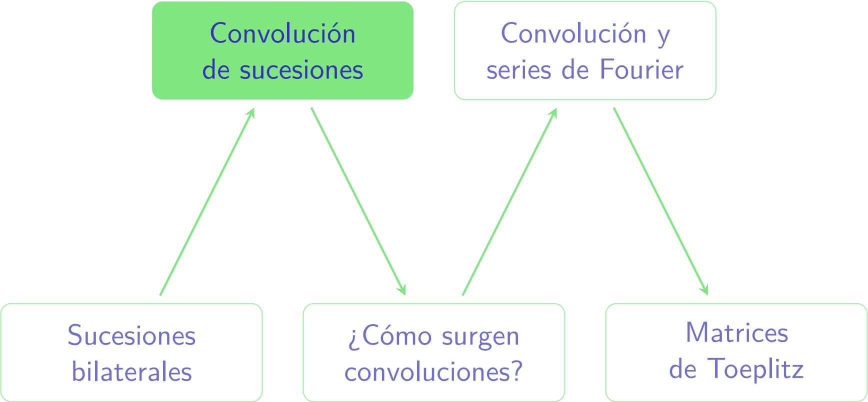
$$\|a\|_p := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_j|^p \right)^{1/p} \qquad (1 \le p < +\infty),$$

$$\|a\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{Z}} |a_j|.$$

Se denota por $\ell^p(\mathbb{Z})$ el espacio de las sucesiones p-sumables:

$$\ell^p(\mathbb{Z}) := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \colon \quad \|a\|_p < +\infty\}.$$

$$\Phi(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^1(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^2(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^\infty(\mathbb{Z}) \subsetneq \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}.$$


Convolución de sucesiones
Convolución y series de Fourier
Sucesiones bilaterales
¿Cómo surgen convoluciones?
Matrices de Toeplitz

Convolución de sucesiones de soporte finito

Sean $a, b \in \Phi(\mathbb{Z})$.
Denotemos por $a * b$ a la sucesión definida mediante la siguiente regla:

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k. \tag{1}$$

Como los soportes de a y b son finitos, la suma en (1) es finita:

$$(a * b)_j = \sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k = \sum_{k \in j - \operatorname{supp}(a)} a_{j-k} b_k.$$

Ejemplo

$$a = (\ldots, 0, a_{-1}, \overset{\overset{0}{\downarrow}}{a_0}, a_1, 0, \ldots), \qquad b = (\ldots, 0, b_{-1}, \overset{\overset{0}{\downarrow}}{b_0}, b_1, 0, \ldots).$$

Calculemos algunas de las componentes de la sucesión $c := a * b$:

$$\begin{aligned}
c_{-2} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{-2-k} b_k = a_{-1} b_{-1}, \\
c_0 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{-k} b_k = a_{-1} b_1 + a_0 b_0 + a_1 b_{-1}, \\
c_1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{1-k} b_k = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\
c_2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{2-k} b_k = a_1 b_1, \\
c_3 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{3-k} b_k = 0.
\end{aligned}$$

Convolución de sucesiones sumables

La definición se extiende a algunas clases de sucesiones sumables.

$$(a * b)_j := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k. \tag{S}$$

Teorema (Young)

Sean $a \in \ell^p(\mathbb{Z})$, $b \in \ell^q(\mathbb{Z})$, *donde* $p, q \in [1, +\infty]$ *tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1.$$

Entonces la serie (S) *converge para cada* $j \in \mathbb{Z}$, *y*

$$\|a * b\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q,$$

donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1,$$

Convolución de sucesiones sumables

Casos particulares del teorema de Young

$$\|a * b\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q, \qquad \text{donde} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1.$$

- $p = q = 1, \quad r =$

Convolución de sucesiones sumables

Casos particulares del teorema de Young

$$\|a * b\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q, \qquad \text{donde} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1.$$

- $p = q = 1, \quad r = 1,$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

- $r = p, \quad q =$

Convolución de sucesiones sumables

Casos particulares del teorema de Young

$$\|a * b\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q, \qquad \text{donde} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1.$$

- $p = q = 1, \quad r = 1,$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

- $r = p, \quad q = 1,$

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

- $r = +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} =$

Convolución de sucesiones sumables

Casos particulares del teorema de Young

$$\|a * b\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q, \qquad \text{donde} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1.$$

- $p = q = 1, \quad r = 1,$
$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$
- $r = p, \quad q = 1,$
$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$
- $r = +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:
$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones

Proposición

Sean $a, b\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *sucesiones tales que para cada* $j \in \mathbb{Z}$ *converge la serie*

$$(a * b)_j := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k. \tag{S}$$

Entonces

$$\operatorname{supp}(a * b) \subseteq$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones

Proposición

Sean $a, b\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *sucesiones tales que para cada* $j \in \mathbb{Z}$ *converge la serie*

$$(a * b)_j := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k. \tag{S}$$

Entonces

$$\operatorname{supp}(a * b) \subseteq \operatorname{supp}(a) + \operatorname{supp}(b).$$

Demostración. Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$. Entonces al menos uno de los sumandos de la serie (S) es no nulo:

$$\exists k \in \mathbb{Z} \qquad a_{j-k} \neq 0 \quad \wedge \quad b_k \neq 0.$$

Denotando $j - k$ por p obtenemos

$$j = p + k, \qquad p \in \operatorname{supp}(a), \qquad k \in \operatorname{supp}(b). \qquad \square$$

Convolución de sucesiones básicas

Proposición

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. *Entonces*

$$e_p * e_q =$$

Convolución de sucesiones básicas

Proposición

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$e_p * e_q = e_{p+q}.$$

Demostración.

$$(e_p * e_q)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_p)_{j-k}(e_q)_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{p,j-k}\delta_{q,k} = \delta_{p,j-q} = \delta_{p+q,j}. \qquad \square$$

Elemento neutro bajo la convolución

Proposición

Sea $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$*. Entonces* $a * e_0 =$

Elemento neutro bajo la convolución

Proposición

Sea $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$*. Entonces* $a * e_0 = a$*.*

Elemento neutro bajo la convolución

Proposición

Sea $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$*. Entonces* $a * e_0 = a$*.*

Demostración. Para cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$(a * e_0)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k}(e_0)_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k}\delta_{0,k} = a_j. \qquad \square$$

Convolución con sucesiones básicas

Ejercicio. Dada una sucesión $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, calcular

$$a * e_1 \qquad \text{y} \qquad a * e_{-1}.$$

Álgebra de convolución del grupo $\mathbb{Z}$

Consideremos $*$ como una operación binaria en $\ell^1(\mathbb{Z})$.

Teorema

Se cumplen las siguientes propiedades $(con\ a, b, c \in \ell^1(\mathbb{Z}))$*:*

- $a * (b + c) = a * b + a * c$,
- $(a * b) * c = a * (b * c)$,
- $a * b = b * a$,
- $\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$,
- $a * e_0 = a$.

Esto significa que $\ell^1(\mathbb{Z})$ con la operación $*$
es una álgebra de Banach conmutativa con identidad e_0.

Operador de convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$

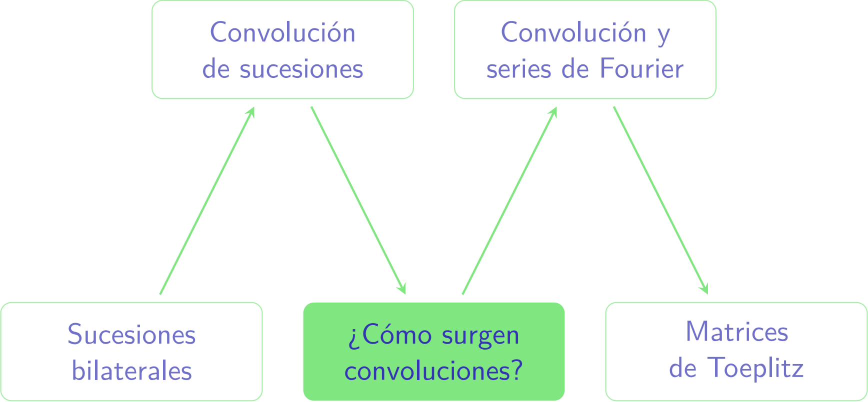
Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Definimos

$$C(a)\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}),$$

$$C(a)x := a * x.$$

El operador $C(a)$ se puede identificar con la matriz infinita $\left[a_{j-k}\right]_{j,k\in\mathbb{Z}}$:

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$


Convolución de sucesiones
Convolución y series de Fourier
Sucesiones bilaterales
¿Cómo surgen convoluciones?
Matrices de Toeplitz

Multiplicación de polinomios

Proposición

Sean $a \in \mathbb{C}^m$, $b \in \mathbb{C}^n$. *Entonces para cada* $z \in \mathbb{C}$

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k \right) = \sum_{p=0}^{m+n-1} c_p z^p,$$

donde

$$c = a * b.$$

Multiplicación de polinomios

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k\right) = \sum_{p=0}^{m+n-1} c_p z^p, \qquad c = a * b.$$

Demostración. La expresión $c_p z^p$ es la suma de los productos $a_j z^j$ por $b_k z^k$ con $j + k = p$:

$$c_p = \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}\\ j+k=p\\ 0\le j\le m-1\\ 0\le k\le n-1}} a_j b_k.$$

Poniendo $a_j = 0$ para $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, m-1\}$ y $b_k = 0$ para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, n-1\}$ obtenemos

$$c_p = \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}\\ j+k=p}} a_j b_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{p-k} b_k = (a * b)_p. \qquad \square$$

Filtros

Consideremos una transformación de sucesiones:

$$x \quad \mapsto \quad y, \qquad y_j = \frac{x_j}{3} + \frac{x_{j-1}}{3} + \frac{x_{j-2}}{3}.$$

Filtros

Consideremos una transformación de sucesiones:

$$x \quad \mapsto \quad y, \qquad y_j = \frac{x_j}{3} + \frac{x_{j-1}}{3} + \frac{x_{j-2}}{3}.$$

Poniendo

$$f_0 = \frac{1}{3}, \quad f_1 = \frac{1}{3}, \quad f_2 = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{supp}(f) = \{0, 1, 2\},$$

escribimos y_j como

$$y_j = \sum_{k=0}^{2} x_{j-k} f_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{j-k} f_k.$$

En otras palabras,

$$y = x * f.$$

Diferencias finitas de primer orden (hacia atrás)

Para cada sucesión $x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definimos $\nabla x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ como

$$(\nabla x)_j = x_j - x_{j-1}.$$

$$\nabla x = (\ldots,\ x_{-1} - x_{-2},\ \overset{\substack{0\\ \downarrow}}{x_0 - x_{-1}},\ x_1 - x_0,\ \ldots).$$

Escribamos ∇x como una convolución:

$$(\nabla x)_j = x_j f_0 + x_{j-1} f_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{j-k} f_k,$$

donde

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = -1, \qquad \operatorname{supp}(f) = \{0, 1\}.$$

Diferencias finitas de segundo orden (hacia atrás)

$$(\nabla^2 x)_j = (\nabla(\nabla x))_j = (\nabla x)_j - (\nabla x)_{j-1} = (x_j - x_{j-1}) - (x_{j-1} - x_{j-2}),$$

esto es,

$$(\nabla^2 x)_j = x_j - 2x_{j-1} + x_{j-2}.$$

Escribamos $\nabla^2 x$ como una convolución:

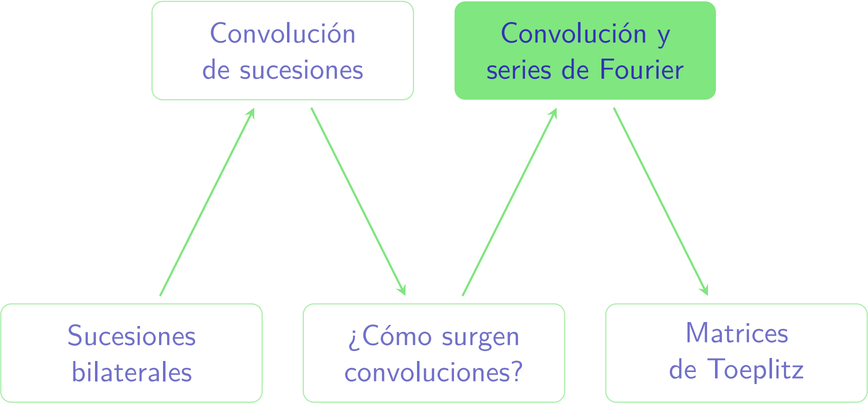
$$(\nabla^2 x)_j = x_j g_0 + x_{j-1} g_1 + x_{j-2} g_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{j-k} g_k,$$

donde

$$g_0 = 1, \quad g_1 = -2, \quad g_2 = 1, \quad \operatorname{supp}(g) = \{0, 1, 2\}.$$

Otras aplicaciones

- Códigos de convolución
  (para detectar y corregir errores de transmisión).
- Multiplicación de números enteros grandes.
- Emparejamiento de cadenas de caracteres
  (encontrar el desplazamiento que da la mejor coincidencia).
- Emparejamiento de ADN.


Convolución de sucesiones
Convolución y series de Fourier
Sucesiones bilaterales
¿Cómo surgen convoluciones?
Matrices de Toeplitz

Idea inductiva: función generatriz de una sucesión

En combinatoria, para estudiar una sucesión $(a_j)_{j=0}^{\infty}$,
a veces es cómodo trabajar con la serie formal

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

Idea inductiva: función generatriz de una sucesión

En combinatoria, para estudiar una sucesión $(a_j)_{j=0}^{\infty}$,
a veces es cómodo trabajar con la serie formal

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

En el caso de una sucesión bilateral consideramos la serie formal

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j t^j.$$

Idea inductiva: función generatriz de una sucesión

En combinatoria, para estudiar una sucesión $(a_j)_{j=0}^{\infty}$,
a veces es cómodo trabajar con la serie formal

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

En el caso de una sucesión bilateral consideramos la serie formal

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j t^j.$$

Si $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, entonces ¿cómo garantizar la convergencia de la serie?

Idea inductiva: función generatriz de una sucesión

En combinatoria, para estudiar una sucesión $(a_j)_{j=0}^{\infty}$,
a veces es cómodo trabajar con la serie formal

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

En el caso de una sucesión bilateral consideramos la serie formal

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j t^j.$$

Si $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, entonces ¿cómo garantizar la convergencia de la serie?

Es natural suponer que

$$|t| = 1.$$

Otra idea inductiva: caracteres del grupo $\mathbb{Z}$

Denotemos por $\mathbb{T}$ al grupo de los números complejos de módulo 1:

$$\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : \ |t| = 1\}.$$

Otra idea inductiva: caracteres del grupo $\mathbb{Z}$

Denotemos por $\mathbb{T}$ al grupo de los números complejos de módulo 1:

$$\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} \colon \; |t| = 1\}.$$

Un caracter del grupo $\mathbb{Z}$ es una función $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi(m+n) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Otra idea inductiva: caracteres del grupo $\mathbb{Z}$

Denotemos por $\mathbb{T}$ al grupo de los números complejos de módulo 1:

$$\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : \ |t| = 1\}.$$

Un caracter del grupo $\mathbb{Z}$ es una función $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi(m+n) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Teorema

Para cada caracter φ del grupo $\mathbb{Z}$ existe un número $t \in \mathbb{T}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi(n) = t^n.$$

Otra idea inductiva: caracteres del grupo $\mathbb{Z}$

Denotemos por $\mathbb{T}$ al grupo de los números complejos de módulo 1:

$$\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : \ |t| = 1\}.$$

Un caracter del grupo $\mathbb{Z}$ es una función $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi(m+n) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Teorema

Para cada caracter φ del grupo $\mathbb{Z}$ existe un número $t \in \mathbb{T}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi(n) = t^n.$$

En otras palabras, $\mathbb{T}$ es el grupo dual de $\mathbb{Z}$.

Tercer idea inductiva: polinomios trigonométricos

$$
\begin{aligned}
F(\theta) &= \alpha + \beta \cos\theta + \gamma \operatorname{sen}\theta \\
&= \alpha + \beta \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + \gamma \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\,i} \\
&= \frac{\beta + i\gamma}{2}\, t^{-1} + \alpha\, t^0 + \frac{\beta - i\gamma}{2}\, t^1, \qquad \text{donde} \qquad t = e^{i\theta}.
\end{aligned}
$$

En general, cada polinomio trigonométrico

$$
\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cos(j\theta) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \operatorname{sen}(j\theta)
$$

se puede escribir como $P(e^{i\theta})$, donde P es un polinomio de Laurent (una combinación lineal finita de potencias enteras):

$$
P(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j t^j.
$$

Medida invariante sobre $\mathbb{T}$

Dado un conjunto de Borel A en $\mathbb{T}$,

$$\mu_{\mathbb{T}}(A) := \frac{1}{2\pi}\mu\{\theta \in [0, 2\pi) \colon \ \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in A\}.$$

Medida invariante sobre $\mathbb{T}$

Dado un conjunto de Borel A en $\mathbb{T}$,

$$\mu_{\mathbb{T}}(A) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\mu\{\theta \in [0, 2\pi) \colon \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in A\}.$$

¿Cómo integrar con respecto a $\mu_{\mathbb{T}}$?

$$\int_{\mathbb{T}} f \, d\mu_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) \, d\theta = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{|z|=1} f(z) \, \frac{dz}{z}.$$

Serie de Fourier (transformada de Fourier sobre $\mathbb{Z}$)

$$a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad \mapsto \quad \widehat{a} \in L^\infty(\mathbb{T}),$$

$$(F_{\mathbb{Z}} a)(t) = \widehat{a}(t) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j t^j.$$

Coeficientes de Fourier (transformada de Fourier sobre $\mathbb{T}$)

$$f \in L^1(\mathbb{T}) \quad \mapsto \quad \check{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}),$$

$$(F_\mathbb{T} f)_k = \check{f}_k := \int_\mathbb{T} f(t) t^{-k}\, d\mu_\mathbb{T}(t).$$

Coeficientes de Fourier (transformada de Fourier sobre $\mathbb{T}$)

$$f \in L^1(\mathbb{T}) \quad \mapsto \quad \check{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}),$$

$$(F_{\mathbb{T}} f)_k = \check{f}_k := \int_{\mathbb{T}} f(t) t^{-k} \, d\mu_{\mathbb{T}}(t).$$

En la notación más humana,

$$(F_{\mathbb{T}} f)_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) \, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\theta} \, d\theta.$$

Coeficientes de Fourier (transformada de Fourier sobre $\mathbb{T}$)

$$f \in L^1(\mathbb{T}) \quad \mapsto \quad \check{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}),$$

$$(F_{\mathbb{T}} f)_k = \check{f}_k := \int_{\mathbb{T}} f(t) t^{-k} \, d\mu_{\mathbb{T}}(t).$$

En la notación más humana,

$$(F_{\mathbb{T}} f)_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) \, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\theta} \, d\theta.$$

Para los amantes de análisis complejo,

$$(F_{\mathbb{T}} f)_k = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{|z|=1} \frac{f(z)\,dz}{z^{k+1}}.$$

Isometría entre $\ell^2(\mathbb{Z})$ y $L^2(\mathbb{T})$

$$
\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[rr, bend left, "F_{\mathbb{Z}}"] & & L^2(\mathbb{T}) \arrow[ll, bend left, "F_{\mathbb{T}}"]
\end{tikzcd}
$$

Teorema de convolución

Teorema

Sean $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $y \in \ell^p(\mathbb{Z})$. *Entonces para cada* $t \in \mathbb{T}$,

$$\widehat{x * y}(t) = \widehat{x}(t)\widehat{y}(t).$$

“Diagonalización” del operador de convolución

Teorema

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. *Entonces*

$$F_{\mathbb{Z}} C(a) F_{\mathbb{T}} = M(\widehat{a}),$$

donde $M(\widehat{a})$ *es el operador de multiplicación por* $\widehat{a}$ *en* $L^2(\mathbb{T})$.

“Diagonalización” del operador de convolución

Teorema

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$*. Entonces*

$$F_{\mathbb{Z}} C(a) F_{\mathbb{T}} = M(\widehat{a}),$$

donde $M(\widehat{a})$ *es el operador de multiplicación por* $\widehat{a}$ *en* $L^2(\mathbb{T})$*.*

Demostración. Para cualquier $f \in L^2(\mathbb{Z})$ ponemos $x = F_{\mathbb{T}} f$ y aplicamos el teorema de convolución:

$$F_{\mathbb{Z}} C(a) F_{\mathbb{T}} f = F_{\mathbb{Z}}(a * x) = (F_{\mathbb{Z}} a)(F_{\mathbb{Z}} x) = \widehat{a} f = M(\widehat{a}) f. \qquad \square$$

“Diagonalización” del operador de convolución

Teorema

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$F_{\mathbb{Z}} C(a) F_{\mathbb{T}} = M(\widehat{a}),$$

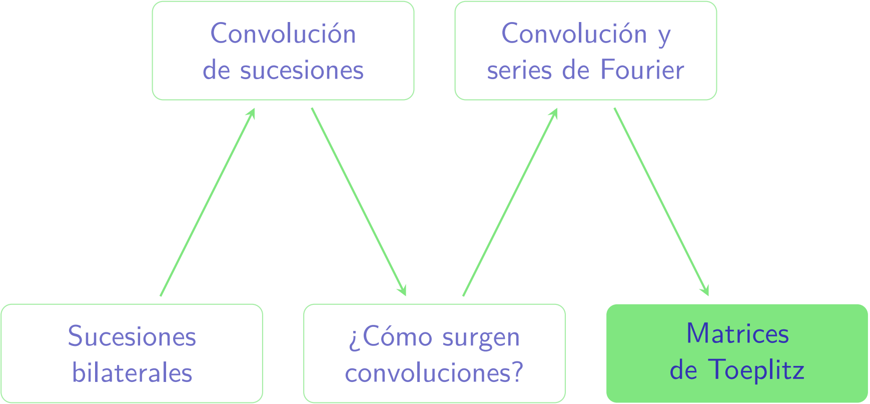
donde $M(\widehat{a})$ es el operador de multiplicación por $\widehat{a}$ en $L^2(\mathbb{T})$.

Demostración. Para cualquier $f \in L^2(\mathbb{Z})$ ponemos $x = F_{\mathbb{T}} f$ y aplicamos el teorema de convolución:

$$F_{\mathbb{Z}} C(a) F_{\mathbb{T}} f = F_{\mathbb{Z}}(a * x) = (F_{\mathbb{Z}} a)(F_{\mathbb{Z}} x) = \widehat{a} f = M(\widehat{a}) f. \qquad \square$$

Corolario

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces $\quad \|C(a)\| = \max_{t \in \mathbb{T}} |\widehat{a}(t)|, \quad \mathrm{sp}(C(a)) = \widehat{a}(\mathbb{T}).$


Convolución de sucesiones
Convolución y series de Fourier
Sucesiones bilaterales
¿Cómo surgen convoluciones?
Matrices de Toeplitz

Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

En esta exposición suponemos que $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$
y denotamos por $\widehat{a}$ a la serie de Fourier correspondiente:

$$\widehat{a}(t) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j t^j \qquad (t \in \mathbb{T}).$$

La función $\widehat{a}$ se llama el *símbolo generador* de las matrices

$$T_n(a) = \left[a_{j-k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Matriz de Toeplitz = operador de convolución truncado

Dado $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, denotemos por J_n al encaje de $\mathbb{C}^n$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$J_n\colon \quad (x_0, \ldots, x_{n-1}) \quad \mapsto \quad (\ldots, 0, 0, \overset{\overset{0}{\downarrow}}{x_0}, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots).$$

Matriz de Toeplitz = operador de convolución truncado

Dado $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, denotemos por J_n al encaje de $\mathbb{C}^n$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$J_n\colon \quad (x_0, \ldots, x_{n-1}) \quad \mapsto \quad (\ldots, 0, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ }}{\overset{\substack{0\\ \downarrow}}{x_0}}, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots).$$

Además denotemos por P_n a la siguiente proyección de $\ell^2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{C}^n$:

$$P_n\colon \quad (\ldots, x_{-1}, \overset{\substack{0\\ \downarrow}}{x_0}, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots) \quad \mapsto \quad (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Matriz de Toeplitz = operador de convolución truncado

Dado $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, denotemos por J_n al encaje de $\mathbb{C}^n$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$J_n\colon \quad (x_0, \ldots, x_{n-1}) \quad \mapsto \quad (\ldots, 0, 0, \overset{\overset{0}{\downarrow}}{x_0}, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots).$$

Además denotemos por P_n a la siguiente proyección de $\ell^2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{C}^n$:

$$P_n\colon \quad (\ldots, x_{-1}, \overset{\overset{0}{\downarrow}}{x_0}, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots) \quad \mapsto \quad (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Entonces

$$\boxed{T_n(a) = P_n C(a) J_n.}$$

La matriz $T_n(a)$ es un corte finito de la matriz infinita $C(a)$

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

$$T_3(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Matrices de Toeplitz autoadjuntas (hermitianas)

Suponemos que el símbolo generador es real:

$$\forall t \in \mathbb{T} \qquad \widehat{a}(t) \in \mathbb{R}.$$

Esta condición es equivalente a la condición que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad a_{-k} = \overline{a_k}.$$

En este caso las matrices de Toeplitz $T_n(a)$ son autoadjuntas.

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$


stealed from
loveiscomix.com

$$\begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

Entender una matriz autoadjunta es...

$$\begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

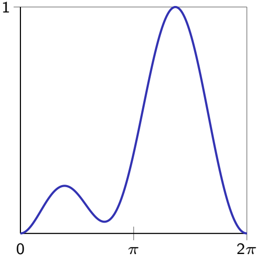
Entender una matriz autoadjunta es...

...saber el comportamiento de sus

***valores y vectores propios**.*

Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

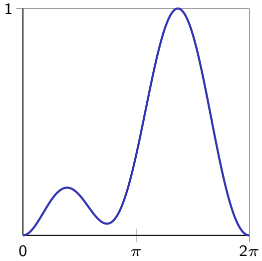
Gráfica de $\widehat{a}$



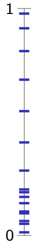
Valores propios de $T_8(a)$

Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

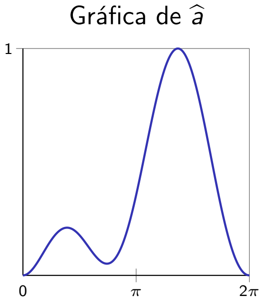
Gráfica de $\widehat{a}$

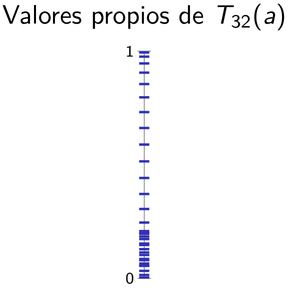


Valores propios de $T_{16}(a)$

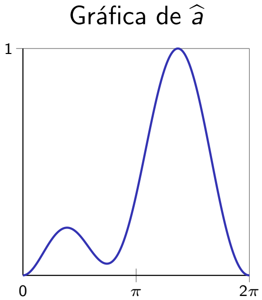


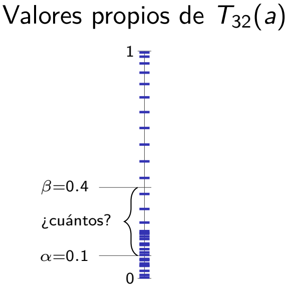
Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas





Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

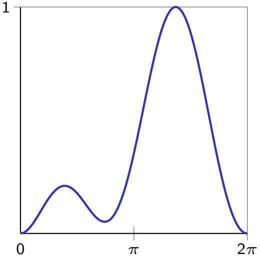




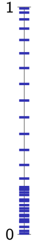
Primera pregunta: $\#\{j\colon\ \lambda_j^{(n)} \in [\alpha,\beta]\} \approx ?$ (Szegő, 1915)

Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de $\widehat{a}$



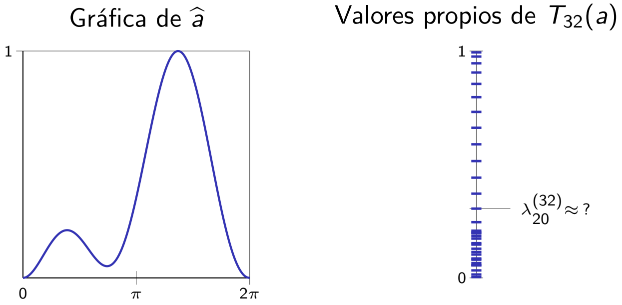
Valores propios de $T_{32}(a)$



Primera pregunta: $\#\{j:\ \lambda_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$ (Szegő, 1915)

Segunda pregunta: $\sum_{j=1}^{n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) \approx ?$, donde $\varphi \in C(\mathbb{R})$

Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas



Primera pregunta: $\#\{j:\ \lambda_j^{(n)} \in [\alpha,\beta]\} \approx ?$ (Szegő, 1915)

Segunda pregunta: $\sum_{j=1}^{n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) \approx ?$, donde $\varphi \in C(\mathbb{R})$

Tercera pregunta: $\lambda_j^{(n)} \approx ?$

continuará. . .