

Matrices de Toeplitz autoadjuntas y el teorema límite de Szegő

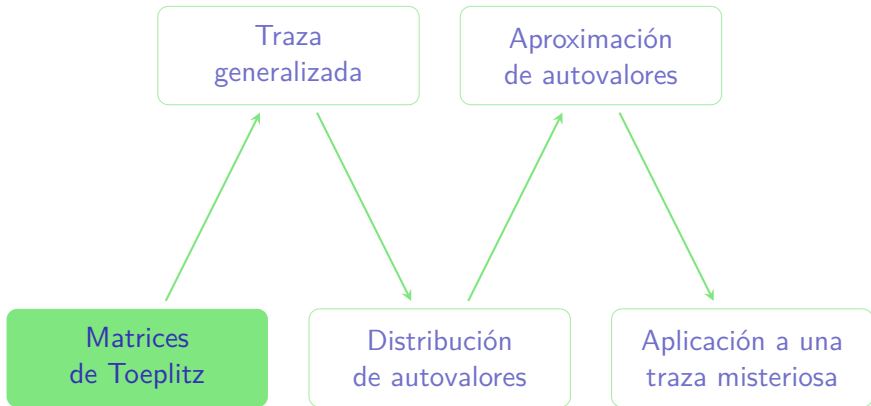
Egor Maximenko

para un proyecto conjunto con

Víctor Hugo Ibarra Mercado,
Eliseo Sarmiento Rosales y José Eliud Silva Urrutia

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

31 de Julio de 2015



La circunferencia unitaria y el intervalo $[0, 2\pi]$

Denotamos por \mathbb{T} a la circunferencia unitaria en \mathbb{C} :

$$\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}.$$

La dotamos con la medida invariante normalizada $\mu_{\mathbb{T}}$.

Dada una función $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, definimos $g \in L^\infty([0, 2\pi])$ como

$$g(\theta) = a(e^{i\theta}).$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{T}} a d\mu_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta.$$

Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} .$$

Suponemos que a_k ($k \in \mathbb{Z}$) son los coeficientes de Fourier de una función $a \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$a_k = \int_{\mathbb{T}} a(t) t^{-k} d\mu_{\mathbb{T}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-ki\theta} d\theta.$$

La función a se llama el *símbolo generador* de las matrices

$$T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n.$$

Matriz de Toeplitz = operador de convolución truncado

Dado $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, denotemos por J_n al encaje de \mathbb{C}^n en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$J_n: (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (\dots, 0, 0, \overset{0}{\downarrow} x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots).$$

Matriz de Toeplitz = operador de convolución truncado

Dado $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, denotemos por J_n al encaje de \mathbb{C}^n en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$J_n: (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (\dots, 0, 0, \overset{0}{\downarrow} x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots).$$

Además denotemos por P_n a la siguiente proyección de $\ell^2(\mathbb{Z})$ sobre \mathbb{C}^n :

$$P_n: (\dots, x_{-1}, \overset{0}{\downarrow} x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots) \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Matriz de Toeplitz = operador de convolución truncado

Dado $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, denotemos por J_n al encaje de \mathbb{C}^n en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$J_n: (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (\dots, 0, 0, \overset{0}{\downarrow} x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots).$$

Además denotemos por P_n a la siguiente proyección de $\ell^2(\mathbb{Z})$ sobre \mathbb{C}^n :

$$P_n: (\dots, x_{-1}, \overset{0}{\downarrow} x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots) \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Entonces

$$T_n(a) = P_n C(a) J_n.$$

La matriz $T_n(a)$ es un corte finito de la matriz infinita $C(a)$

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

$$T_3(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Matrices de Toeplitz autoadjuntas (hermitianas)

Suponemos que el símbolo generador es real:

$$a \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Entonces

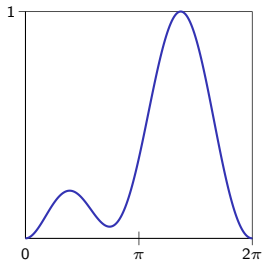
$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad a_{-k} = \overline{a_k},$$

y las matrices de Toeplitz $T_n(a)$ son autoadjuntas.

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de g

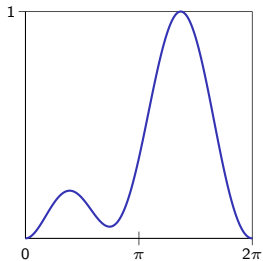


Valores propios de $T_8(a)$



Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de g

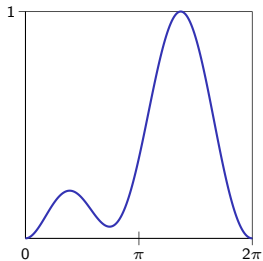


Valores propios de $T_{16}(a)$

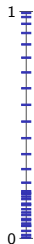


Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de g

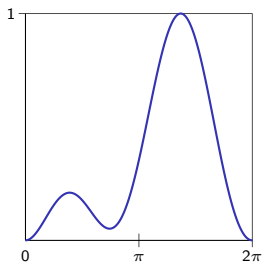


Valores propios de $T_{32}(a)$

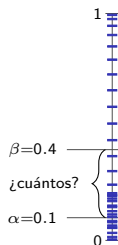


Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de g



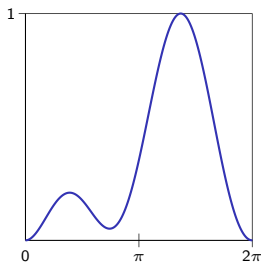
Valores propios de $T_{32}(a)$



Primera pregunta: $\#\{j: \lambda_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$ (Szegő, 1915)

Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de g



Valores propios de $T_{32}(a)$

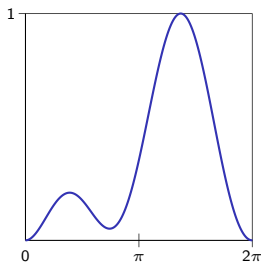


Primera pregunta: $\#\{j: \lambda_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$ (Szegő, 1915)

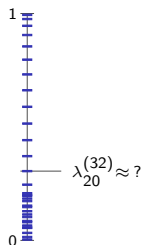
Segunda pregunta: $\sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}) \approx ?$, donde $\varphi \in C(\mathbb{R})$

Valores propios de matrices de Toeplitz hermitianas

Gráfica de g



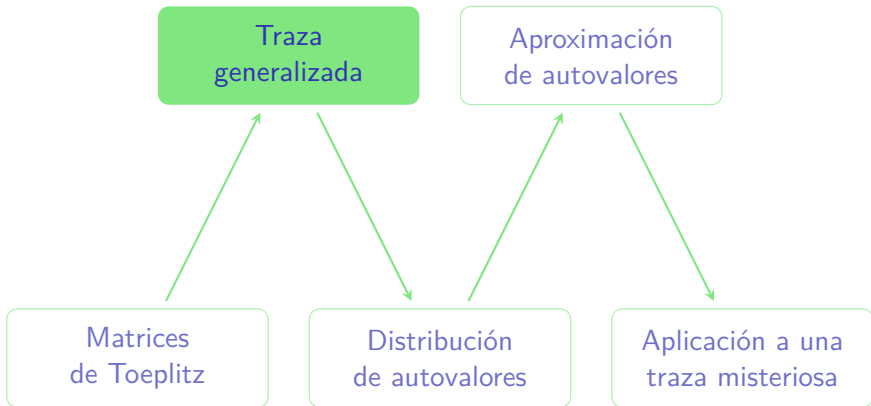
Valores propios de $T_{32}(a)$



Primera pregunta: $\#\{j: \lambda_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$ (Szegő, 1915)

Segunda pregunta: $\sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}) \approx ?$, donde $\varphi \in C(\mathbb{R})$

Tercera pregunta: $\lambda_j^{(n)} \approx ?$



Fórmula para la traza de una matriz de Toeplitz

Observación

Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ y sea $n \in \{1, 2, \dots\}$. Entonces

$$\operatorname{tr}(T_n(a)) = na_0 = n \int_{\mathbb{T}} a d\mu_{\mathbb{T}} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) d\theta.$$

La traza generalizada de una matriz de Toeplitz

Sean $a \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $n \in \{1, 2, \dots\}$ y $\varphi \in C(\mathbb{R})$.
Entonces la matriz $\varphi(T_n(a))$ está bien definida y

$$\text{tr}(\varphi(T_n(a))) = \sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}).$$

Consideremos el comportamiento asintótico de esta expresión,
cuando $n \rightarrow \infty$.

Norma de Frobenius (de Hilbert y Schmidt)

En el espacio de matrices $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ se define el producto interno

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^* B) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{A_{j,k}} B_{j,k}.$$

La norma correspondiente se llama la **norma de Frobenius** :

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{j,k}|^2 \right)^{1/2}.$$

$T_n(a)T_n(b) \approx T_n(ab)$ en cierto sentido

Lema

Sean $a, b \in C^\infty(\mathbb{T})$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \|T_n(a)T_n(b) - T_n(ab)\|_F \right) = 0.$$

$T_n(a)T_n(b) \approx T_n(ab)$ en cierto sentido

Lema

Sean $a, b \in C^\infty(\mathbb{T})$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \|T_n(a)T_n(b) - T_n(ab)\|_F \right) = 0.$$

Este lema permite demostrar que

$$\frac{1}{n} (\operatorname{tr}(T_n^p(a)) - \operatorname{tr}(T_n(a^p))) \rightarrow 0,$$

luego

$$\frac{1}{n} (\operatorname{tr}(\varphi(T_n(a))) - \operatorname{tr}(T_n(\varphi \circ a))) \rightarrow 0$$

para cualquier polinomio φ .

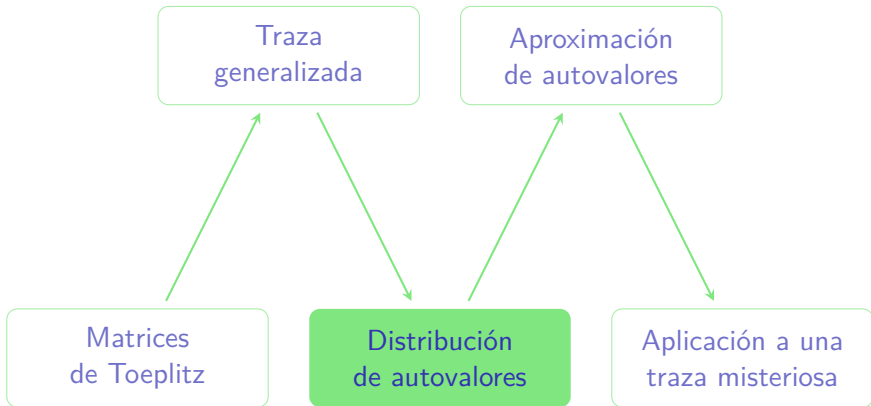
Teorema límite de Szegő (1915)

símbolo generador
 $a \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

función de prueba
 $\varphi \in C(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ a \, d\mu_{\mathbb{T}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(\lambda_j^{(n)}) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(g(\theta)) \, d\theta.$$



Corolario del teorema límite de Szegő

distribución de los valores propios de matrices de Toeplitz autoadjuntas

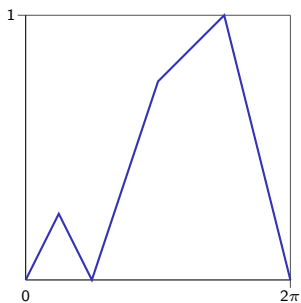
símbolo generador
 $a \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

$\alpha < \beta$
 $\mu_{\mathbb{T}}(a^{-1}(\{\alpha, \beta\})) = 0$

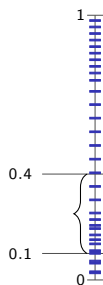
$$\frac{\#\{j: \alpha \leq \lambda_j^{(n)} \leq \beta\}}{n} \longrightarrow \frac{\mu\{\theta \in [0, 2\pi]: \alpha \leq a(e^{i\theta}) \leq \beta\}}{2\pi}$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de g

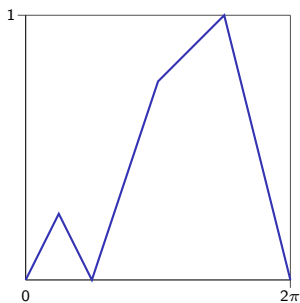


Eigenvalues of $T_{32}(a)$

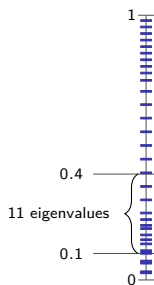


Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de g



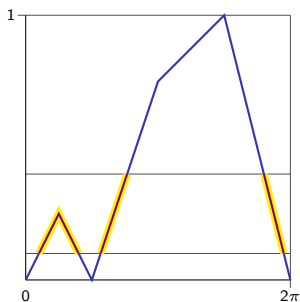
Eigenvalues of $T_{32}(a)$



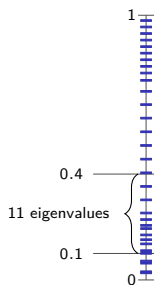
$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de g



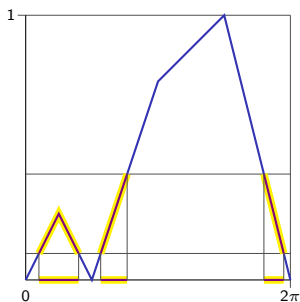
Eigenvalues of $T_{32}(a)$



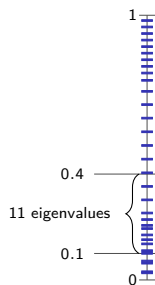
$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de g



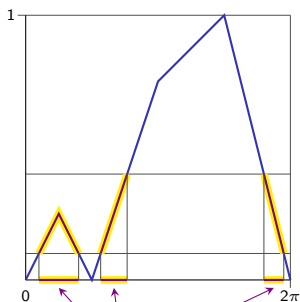
Eigenvalues of $T_{32}(a)$



$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

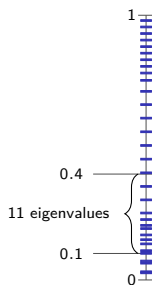
Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de g



$$\frac{\mu \{ \theta : 0.1 \leq a(\theta) \leq 0.4 \}}{2\pi} = 0.325$$

Eigenvalues of $T_{32}(a)$

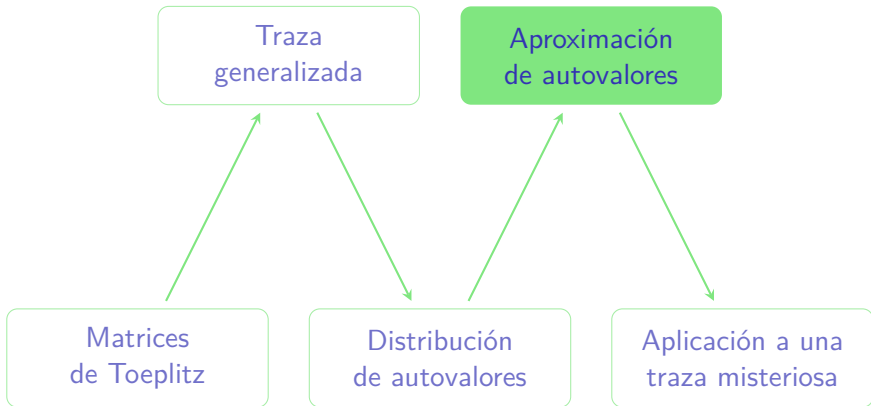


$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

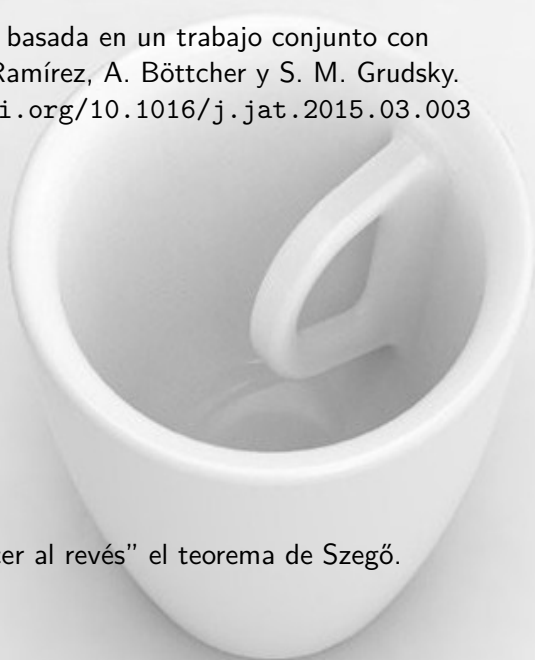
Szegő encontró una fórmula aproximada para la traza generalizada y describió la distribución asintótica de los valores propios.

Otra pregunta se quedó sin respuesta para 100 años:

$$\lambda_j^{(n)} \approx ?$$



Esta parte está basada en un trabajo conjunto con
J. M. Bogoya Ramírez, A. Böttcher y S. M. Grudsky.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2015.03.003>



La idea es “hacer al revés” el teorema de Szegő.

Función cuantil de una lista de números



Los mismos números en el orden ascendente:



$$\text{QuantileFunction}(1/3) = 118$$

porque 118 es el número más pequeño v
tal que al menos $1/3$ de los elementos son menores o iguales a v .

Función cuantil asociada a una función $a \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

F_a := la función de distribución acumulada de a :

$$F_a(v) := \mu_{\mathbb{T}} \{t \in \mathbb{T} : a(t) \leq v\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

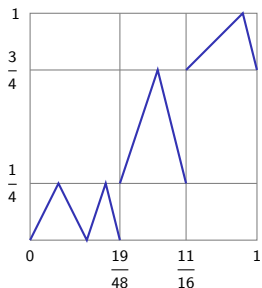
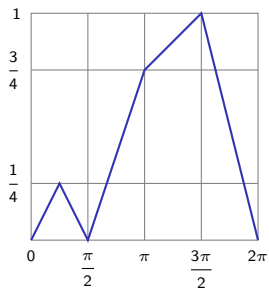
Q_a := la función cuantil correspondiente:

$$Q_a(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_a(v) \geq p\}, \quad p \in (0, 1].$$

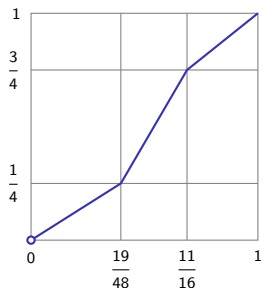
Q_a crece y tiene la misma distribución que a .

Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de g

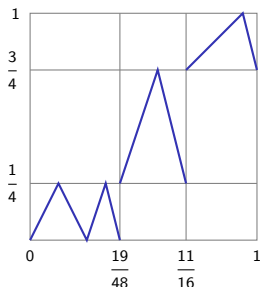
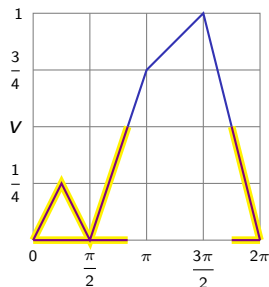


Graph of Q_a

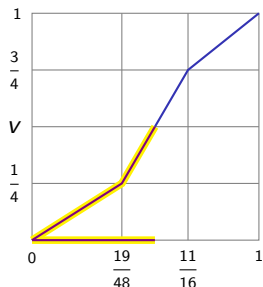


Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de g



Graph of Q_a

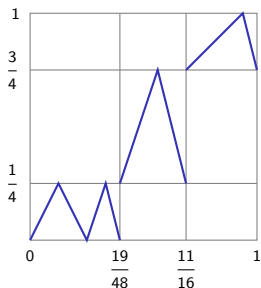
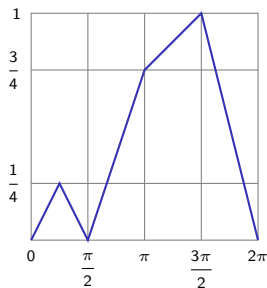


a y Q_a son idénticamente distribuidas:

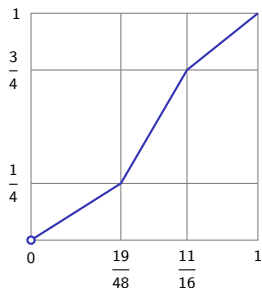
$$\mu_{\mathbb{T}}\{t \in \mathbb{T} : a(t) \leq v\} = \mu\{p \in (0, 1] : Q_a(p) \leq v\}$$

Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de g



Graph of Q_a



a $\xrightarrow{\text{reordenamiento en el estilo de Lebesgue}}$ Q_a

Convergencia uniforme de los valores propios

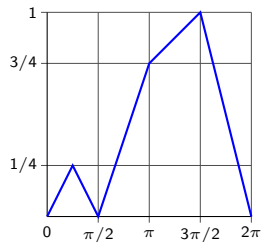
$$a \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

$\mathcal{R}(a)$ es conexo

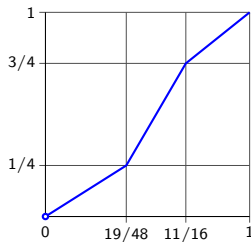
$$\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j^{(n)} - Q_a(j/n)| \longrightarrow 0$$

Ejemplo

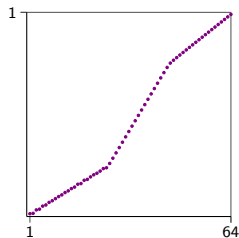
Gráfica de g



Gráfica de Q_a



Valores propios de $T_{64}(a)$

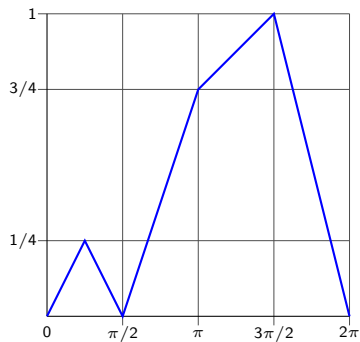


Cada valor propio $\lambda_j^{(n)}$ se muestra como el punto $\left(\frac{j}{n}, \lambda_j^{(n)}\right)$.

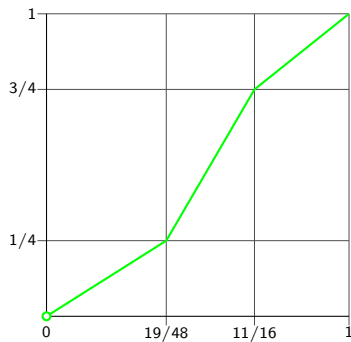
Se ve que el tercer dibujo parece mucho al segundo.

Ejemplo

Gráfica de g

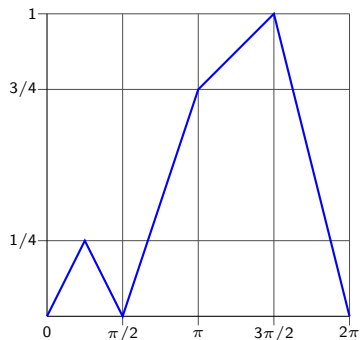


Gráfica de Q_a

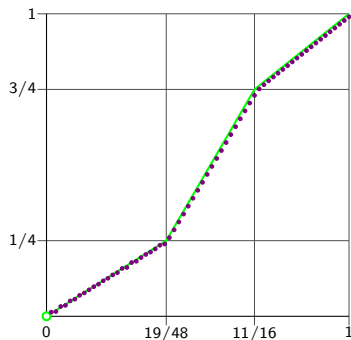


Ejemplo

Gráfica de g



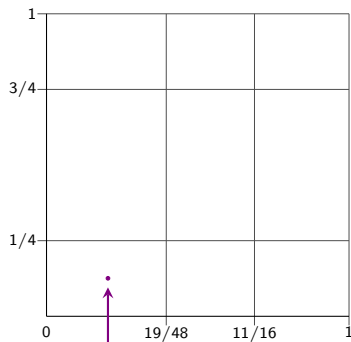
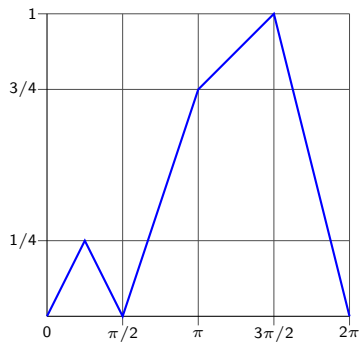
Gráfica de Q_a



y los puntos $(j/n, \lambda_j^{(n)})$

Ejemplo

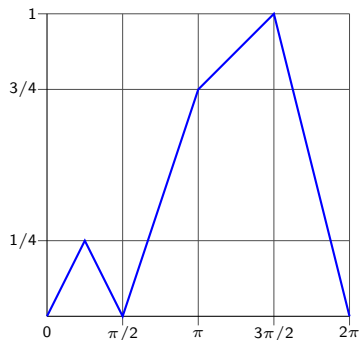
Gráfica de g



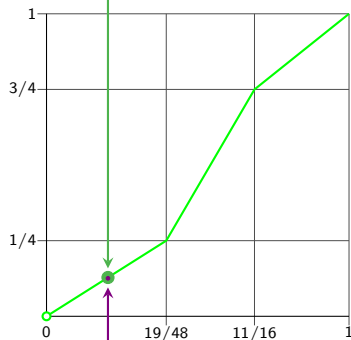
$$\left(\frac{13}{64}, \lambda_{13}^{(64)}\right)$$

Ejemplo

Gráfica de g



$$\left(\frac{13}{64}, Q_a \left(\frac{13}{64} \right) \right)$$

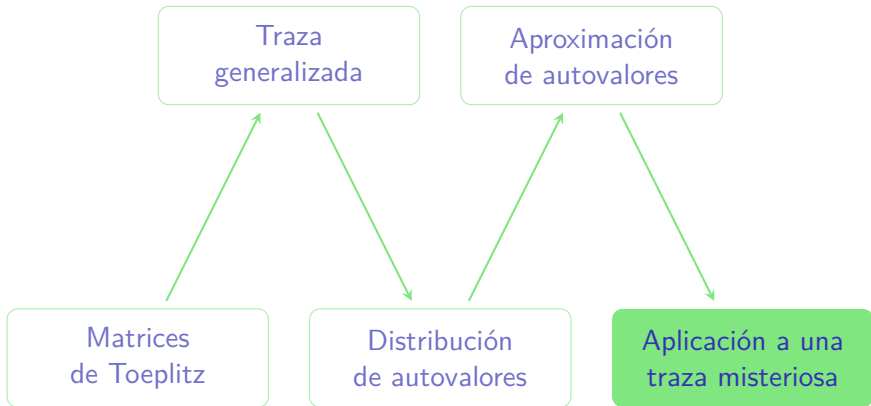


$$\left(\frac{13}{64}, \lambda_{13}^{(64)} \right)$$

El teorema límite de Szegő combinado con el concepto de función cuantil proporciona el término principal de la asintótica de los valores propios:

$$\lambda_j^{(n)} \approx Q_a\left(\frac{j}{n}\right)$$

suponiendo que $a \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ y la imagen esencial $\mathcal{R}(a)$ es conexa.



Aplicación a una traza misteriosa

En un problema de suavizamiento de datos surge la expresión

$$f_n(p) = 1 - \frac{1}{n} \operatorname{tr} \left((I_n + p R_n^\top R_n)^{-1} \right),$$

donde

- p es un parámetro positivo,
- I_n es la matriz identidad $n \times n$,
- R_n es la matriz $(n-2) \times n$ asociada al operador de diferencias de segundo orden.

$$R_7 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

f_n escrita a través de los valores propios

La función f_n se puede escribir como

$$f_n(p) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + p \lambda_j(R_n^\top R_n)}.$$

f_n escrita a través de los valores propios

La función f_n se puede escribir como

$$f_n(p) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + p \lambda_j(R_n^\top R_n)}.$$

Notamos que

$$\text{rank}(R_n^\top R_n) = n - 2,$$

y los valores propios no nulos de $R_n^\top R_n$ son los valores propios de $R_n R_n^\top$.

f_n escrita a través de los valores propios

La función f_n se puede escribir como

$$f_n(p) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + p \lambda_j(R_n^\top R_n)}.$$

Notamos que

$$\text{rank}(R_n^\top R_n) = n - 2,$$

y los valores propios no nulos de $R_n^\top R_n$ son los valores propios de $R_n R_n^\top$.

$$f_n(p) = 1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{1 + p \lambda_j(R_n R_n^\top)}.$$

Pasamos a una matriz de Toeplitz pentadiagonal

Un cálculo directo muestra que

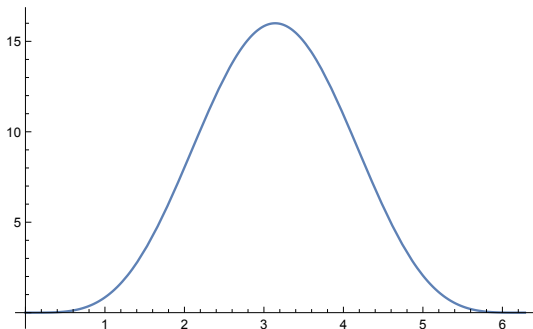
$$R_n R_n^\top = T_{n-2}(a), \quad \text{donde}$$

$$a(t) = t^{-2} - 4t^{-1} + 6 - 4t + t^2 = \frac{(1-t)^4}{t^2}.$$

Por ejemplo,

$$T_8(a) = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

El símbolo generador de estas matrices pentadiagonales



Recientemente S. M. Grudsky y M. A. Barrera Ceballos dedujeron fórmulas asintóticas para los valores propios de las matrices de Toeplitz generadas por esta función. Nosotros no utilizamos sus fórmulas.

Aplicamos el teorema de Szegő

$$f_n(p) = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{n-2} \operatorname{tr}(\varphi_p(T_{n-2}(a))),$$

donde

$$\varphi_p(u) = \frac{pu}{1+pu},$$

$$a(t) = t^{-2} - 4t^{-1} + 6 - 4t + t^2 = \frac{(1-t)^4}{t^2}.$$

Por el teorema de Szegő,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = g(p),$$

donde

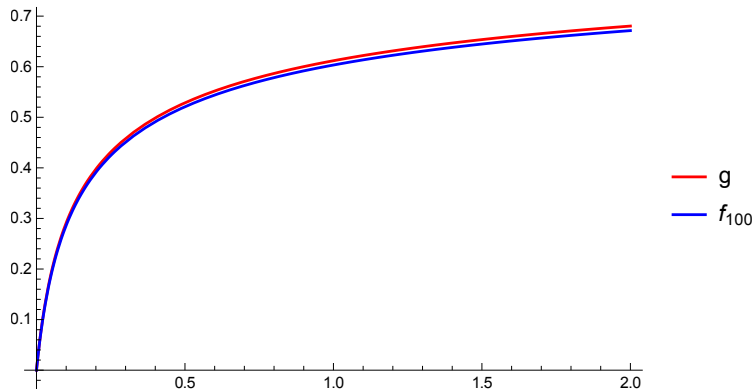
$$g(p) = \int_{\mathbb{T}} \frac{p a}{1 + p a} d\mu_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right)^4}{1 + p \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right)^4} d\theta.$$

La última integral se puede calcular con la técnica de residuos.

Resultado final: la función límite

Para cada $p \in [0, +\infty)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = g(p) = 1 - \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 16p}}{2(1 + 16p)}}.$$



¡Gracias!