Elementos aproximadamente invertibles en álgebras normadas sin identidad

Kevin M. Esmeral García, Ondrej Hutník, Egor A. Maximenko

Investigación inspirada por trabajos conjuntos
con Crispin Herrera Yañez y Nikolai Vasilevski

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Durango, México
Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana
29 de octubre de 2014

La invertibilidad es
uno de los conceptos principales
en álgebras con identidad.

La invertibilidad es
uno de los conceptos principales
en álgebras con identidad.

¿Habrá algún análogo en álgebras sin identidad?

La invertibilidad es
uno de los conceptos principales
en álgebras con identidad.

¿Habrá algún análogo en álgebras sin identidad?

Si hay identidades aproximadas,
entonces podemos estudiar elementos
aproximadamente invertibles.

La invertibilidad es
uno de los conceptos principales
en álgebras con identidad.

¿Habrá algún análogo en álgebras sin identidad?

Si hay identidades aproximadas,
entonces podemos estudiar elementos
aproximadamente invertibles.

Otros caminos:
unitarización,
elementos casi invertibles.

Contenido

Definiciones

Ejemplos de álgebras sin identidad

$C_0(\mathbb{R})$

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$

$A_0(\mathbb{D})$

$L^1(\mathbb{R})$

Resultados generales

Definición de álgebra normada (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un espacio normado complejo y al mismo tiempo un álgebra. Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra normada si la norma en $\mathcal{A}$ es *submultiplicativa*:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Un álgebra normada $\mathcal{A}$ se llama álgebra de Banach si $\mathcal{A}$ es *completa* respecto a la distancia inducida por la norma.

Ejemplos principales de álgebras de Banach (con identidad):

- $C_b(T, \mathbb{C})$ = las funciones acotadas continuas $T \to \mathbb{C}$, donde T es un espacio topológico.
- $B(X, X)$ = los operadores lineales acotados que actúan en un espacio de Banach X.

Definición de álgebra topológica (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un espacio vectorial topológico y al mismo tiempo un álgebra. Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra topológica si la multiplicación en $\mathcal{A}$ es continua respecto a cada uno de los argumentos, es decir, si:

- para cada $x \in \mathcal{A}$, la función $y \mapsto xy$ es continua;
- para cada $y \in \mathcal{A}$, la función $x \mapsto xy$ es continua.

Algunos autores piden que la multiplicación sea una función continua de dos argumentos.

Definición de red (repaso)

El concepto de *redes* generaliza al concepto de *sucesiones*.

Sea $\succeq$ un orden parcial en un conjunto J.
Se dice que $(J, \succeq)$ es un conjunto dirigido si

$$\forall p, q \in J \qquad \exists r \in J \qquad (r \succeq p) \quad \wedge \quad (r \succeq q).$$

Una red en un espacio topológico (X, τ) es una función $s \colon J \to X$, donde $(J, \preceq)$ es un conjunto dirigido.
Vamos a escribir $(s_j)_{j \in J}$ en lugar de s.

Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $(s_j)_{j \in J}$ una red y sea $p \in X$.
Se dice que la red $(s_j)_{j \in J}$ converge al punto p si

$$\forall V \in \tau_p \qquad \exists k \in J \qquad \forall j \succeq k \qquad s_j \in V.$$

Definiciones

Definición (Thatte, Bhatt, 1984)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra topológica con identidad e y sea $x \in \mathcal{A}$.
Se dice que x es topológicamente invertible por la derecha si existe una red $(r_j)_{j \in J}$ tal que

$$\lim_{j \in J} x\, r_j = e.$$

Definición (Arizmendi, Carrillo, Palacios, 2007)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra topológica y sea $x \in \mathcal{A}$.
Se dice que x es topológicamente invertible por la derecha si

$$\operatorname{clos}(x\,\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Definiciones

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra topológica (con o sin identidad).

Definición (identidad aproximada)

Una red $(e_j)_{j\in J}$ en $\mathcal{A}$ se llama identidad aproximada en $\mathcal{A}$ si para cada elemento a de $\mathcal{A}$

$$\lim_{j\in J} ae_j = a, \qquad \lim_{j\in J} e_j a = a.$$

Decimos que $\mathcal{A}$ es aproximadamente unitaria si existe una identidad aproximada en $\mathcal{A}$.

Definiciones

Definición (red aprox. inversa por la derecha a un elemento)

Sea $x \in \mathcal{A}$ y sea $(r_j)_{j\in J}$ una red en $\mathcal{A}$.
Decimos que $(r_j)_{j\in J}$ es aprox. inversa por la derecha de x si la red $(x\, r_j)_{j\in J}$ es una identidad aproximada en $\mathcal{A}$.

Definición (elemento aproximadamente invertible por la derecha)

Un elemento x de $\mathcal{A}$ se llama aprox. invertible por la derecha si existe una red $(r_j)_{j\in J}$ en $\mathcal{A}$ tal que $(x\, r_j)_{j\in J}$ es una identidad aproximada en $\mathcal{A}$.

Notación para el conjunto de los elementos aproximadamente invertibles por la derecha:

$$\mathrm{ApInv}_R(\mathcal{A}).$$

Situación en álgebras normadas con identidad

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada con identidad e y sea $x \in \mathcal{A}$.

invertibilidad derecha	$\exists y \in \mathcal{A} \quad xy = e$	
	$\downarrow$	si $\mathcal{A}$ es completa
invert. derecha topológica, $\operatorname{clos}(x\mathcal{A}) = \mathcal{A}$	$\exists (r_j)_{j \in J} \quad \lim\limits_{j \in J} x r_j = e$	
	$\updownarrow$	
invert. derecha aproximada	$\exists (r_j)_{j \in J} \quad (x r_j)_{j \in J}$ es una identidad aprox.	

Referencias I

WEIL, ANDRÉ (1940):
L'int´égration dans les groupes topologiques et ses applications.
Actualités Sci. Ind. No. 869, Hermann, Paris.

SEGAL, IRVING E. (1947):
Irreducible representations of operator algebras.
Bull. Amer. Math. Soc. 53, 73–88.

DIXON, PETER G. (1973):
Approximate identities in normed algebras.
Proc. London Math. Soc. 26, 458–496.

DORAN, ROBERT S.; WICHMANN, JOSEF (1979):
Approximate Identities and Factorization in Banach Modules.
Lecture Notes in Mathematics, vol. 768, Springer.

Referencias II

THATTE, A. D.; BHATT, SUBHASH J. (1984):
On topolizing invertibility.
Indian J. Pure Appl. Math. 15:12, 1308–1312.

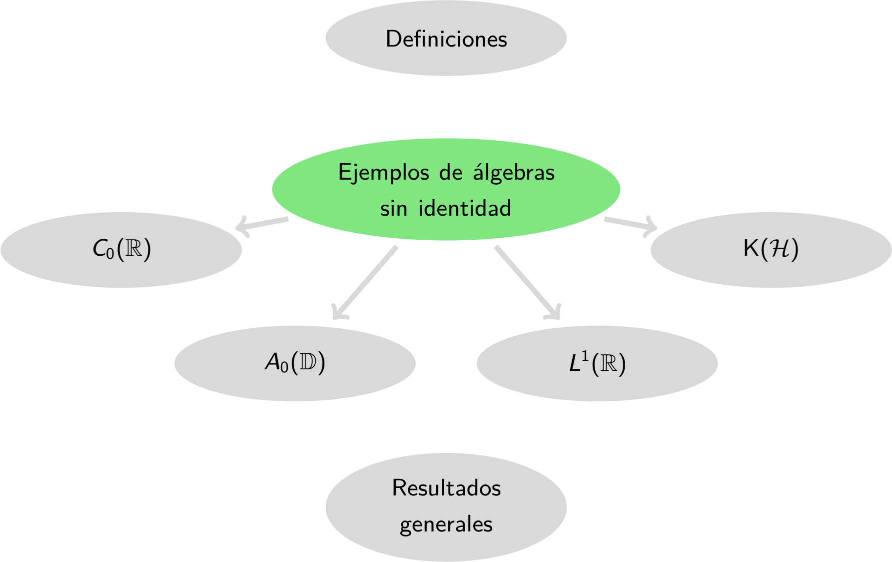
HAGEN, ROLAND; ROCH, STEFFEN; SILBERMANN, BERND (1995):
Spectral Theory of Approximation Methods for Convolution Equations.
Birkhäauser Verlag, Basel–Boston–Berlin.

NAJMI, ABDELHAK (2004):
Ideal theory in topological algebras.
Turk J. Math 28:4, 313–333.

ARIZMENDI-PEIMBERT, HUGO; CARRILLO-HOYO, ANGEL (2007):
On the topologically invertible elements of a topological algebra.
Math. Proc. Royal Irish Acad. 107A:1, 73–80.

ARIZMENDI, H.; CARRILLO, A.; PALACIOS, LOURDES (2007):
On Q_t-algebras.

Contenido


Definiciones
Ejemplos de álgebras sin identidad
$C_0(\mathbb{R})$
$\mathrm{K}(\mathcal{H})$
$A_0(\mathbb{D})$
$L^1(\mathbb{R})$
Resultados generales

Contenido

Definiciones

Ejemplos de álgebras sin identidad

$C_0(\mathbb{R})$

la buena

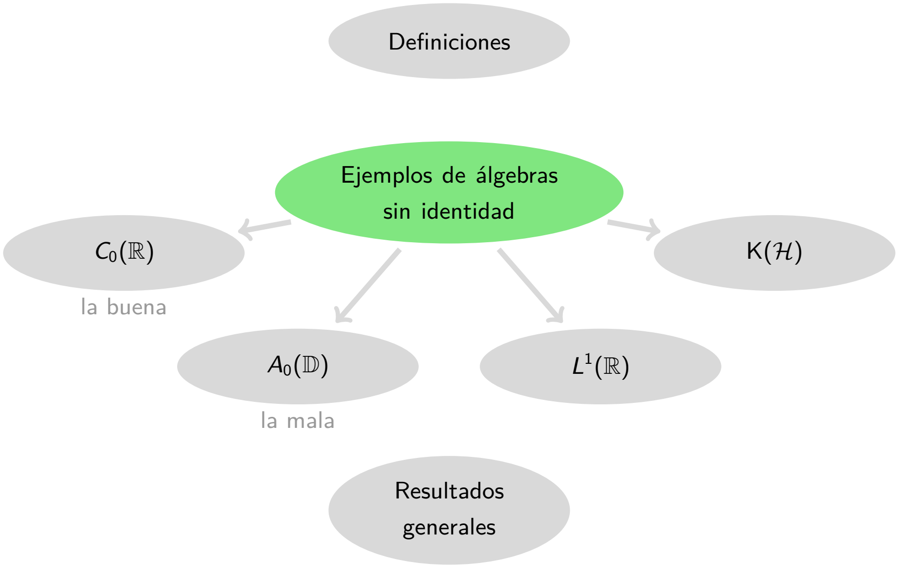
$A_0(\mathbb{D})$

$L^1(\mathbb{R})$

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Resultados generales

Contenido


Definiciones
Ejemplos de álgebras sin identidad
$C_0(\mathbb{R})$
la buena
$K(\mathcal{H})$
$A_0(\mathbb{D})$
la mala
$L^1(\mathbb{R})$
Resultados generales

Contenido

Definiciones

Ejemplos de álgebras sin identidad

$C_0(\mathbb{R})$

la buena

$A_0(\mathbb{D})$

la mala

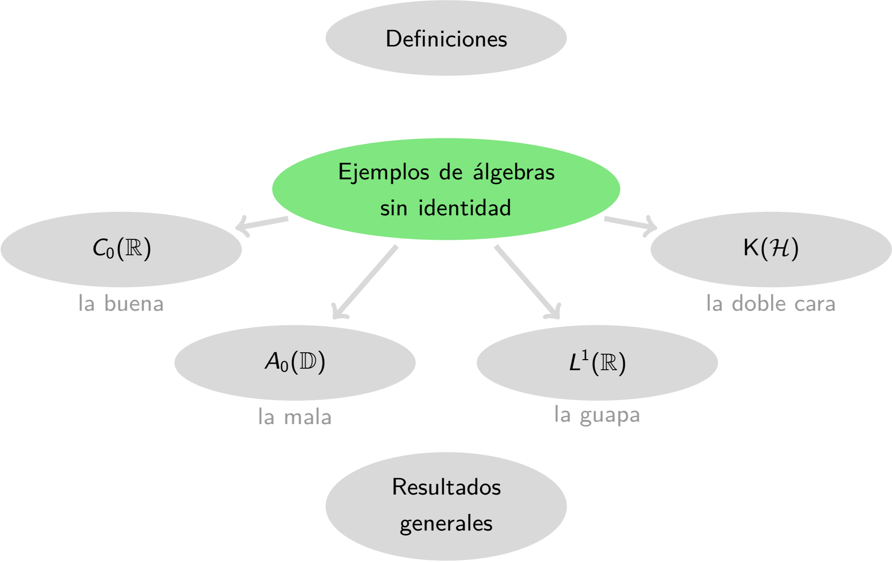
$L^1(\mathbb{R})$

la guapa

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Resultados generales

Contenido


Definiciones
Ejemplos de álgebras sin identidad
$C_0(\mathbb{R})$
la buena
$A_0(\mathbb{D})$
la mala
$L^1(\mathbb{R})$
la guapa
$\mathrm{K}(\mathcal{H})$
la doble cara
Resultados generales

Contenido

Definiciones

Ejemplos de álgebras sin identidad

$C_0(\mathbb{R})$

la buena

$K(\mathcal{H})$

$A_0(\mathbb{D})$

$L^1(\mathbb{R})$

Resultados generales

$C_0(\mathbb{R})$, unitarización y elementos casi invertibles

$C_0(\mathbb{R}) :=$ las funciones continuas que tienden a cero en ∞.

En la unitarización de $C_0(\mathbb{R})$ ningún elemento de $C_0(\mathbb{R})$ es invertible.

$C_0(\mathbb{R})$, unitarización y elementos casi invertibles

$C_0(\mathbb{R}) :=$ las funciones continuas que tienden a cero en ∞.

En la unitarización de $C_0(\mathbb{R})$ ningún elemento de $C_0(\mathbb{R})$ es invertible.

f se llama casi invertible si existe un elemento g tal que

$$fg - f - g = 0.$$

$C_0(\mathbb{R})$, unitarización y elementos casi invertibles

$C_0(\mathbb{R}) :=$ las funciones continuas que tienden a cero en ∞.

En la unitarización de $C_0(\mathbb{R})$ ningún elemento de $C_0(\mathbb{R})$ es invertible.

f se llama casi invertible si existe un elemento g tal que

$$fg - f - g = 0.$$

En el álgebra $C_0(\mathbb{R})$,

$$\boxed{f \text{ es casi invertible}} \longleftrightarrow \boxed{1 \notin f(\mathbb{R})}$$

Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{1}{2 + x^2},$$

entonces f es C.I., $4f$ no es C.I., $4\,\mathrm{i}\,f$ es C.I.

Descripción de las identidades aproximadas en $C_0(\mathbb{R})$

$C_0(\mathbb{R}) :=$ las funciones continuas que tienden a cero en ∞.

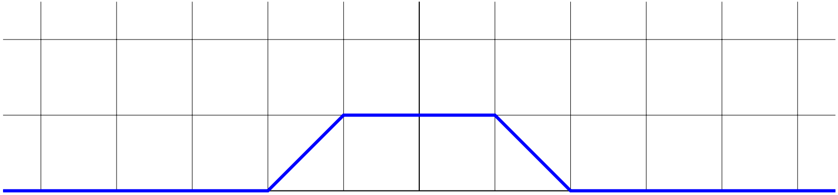
$\mathcal{K} :=$ los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Dada una red $(e_j)_{j\in J}$ en $C_0(\mathbb{R})$, las siguientes condiciones son equivalentes:

$(e_j)_{j\in J}$ es id. aprox. $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $\forall K \in \mathcal{K}$ $\displaystyle\lim_{j\in J}\sup_{t\in K}|e_j(t)-1| = 0$

Ejemplo de una identidad aproximada en $C_0(\mathbb{R})$

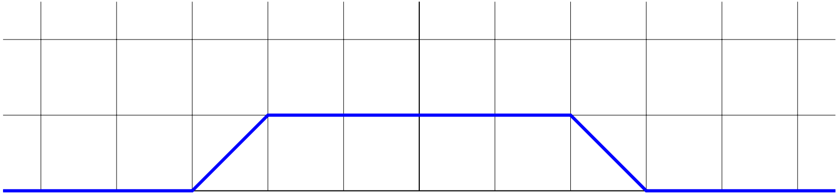
$$e_j(t) := \begin{cases} 1, & |t| \le j; \\ j+1-|t|, & j < |t| \le j+1; \\ 0, & |t| > j+1. \end{cases}$$



Gráfica de e_1

Ejemplo de una identidad aproximada en $C_0(\mathbb{R})$

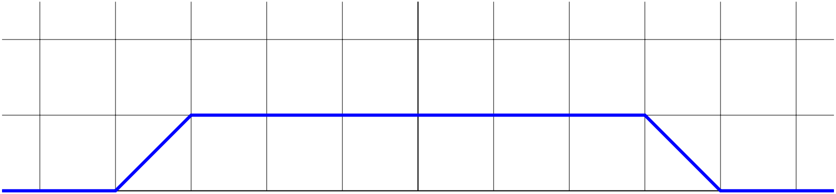
$$e_j(t) := \begin{cases} 1, & |t| \le j; \\ j + 1 - |t|, & j < |t| \le j + 1; \\ 0, & |t| > j + 1. \end{cases}$$



Gráfica de e_2

Ejemplo de una identidad aproximada en $C_0(\mathbb{R})$

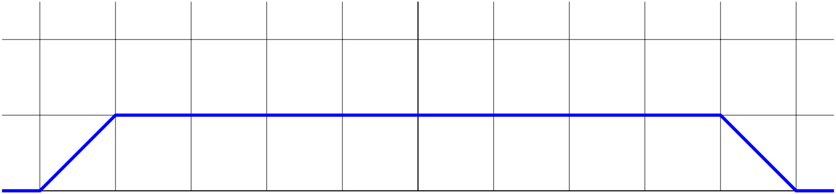
$$e_j(t) := \begin{cases} 1, & |t| \le j; \\ j+1-|t|, & j < |t| \le j+1; \\ 0, & |t| > j+1. \end{cases}$$



Gráfica de e_3

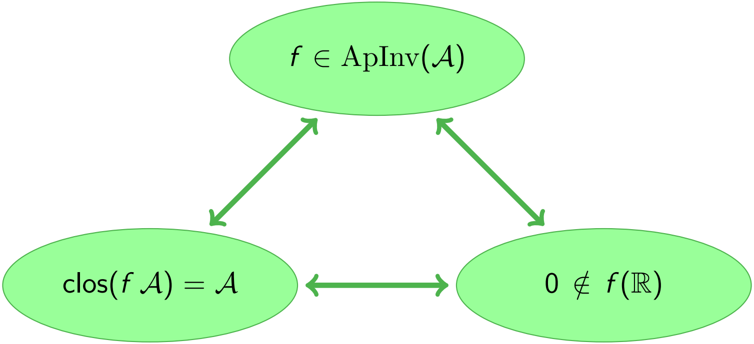
Ejemplo de una identidad aproximada en $C_0(\mathbb{R})$

$$e_j(t) := \begin{cases} 1, & |t| \le j; \\ j + 1 - |t|, & j < |t| \le j + 1; \\ 0, & |t| > j + 1. \end{cases}$$



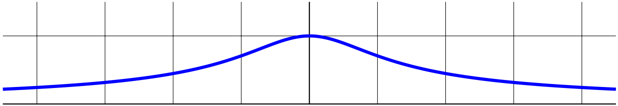
Gráfica de e_4

Criterio de la invertibilidad aproximada en $\mathcal{A} = C_0(\mathbb{R})$

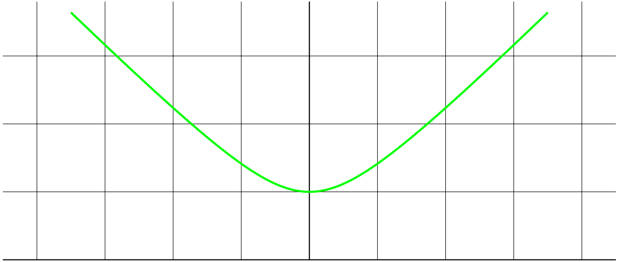


Ejemplo de elemento aproximadamente invertible en $C_0(\mathbb{R})$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

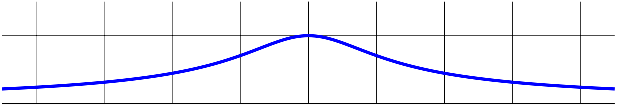


$1/f$ no es acotada

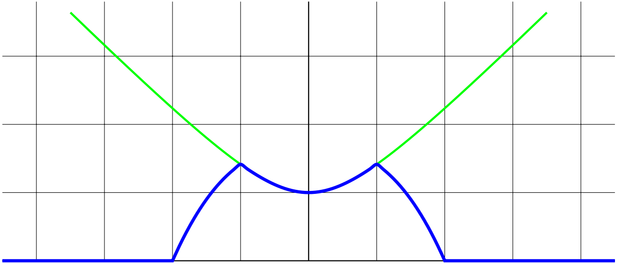


Ejemplo de elemento aproximadamente invertible en $C_0(\mathbb{R})$

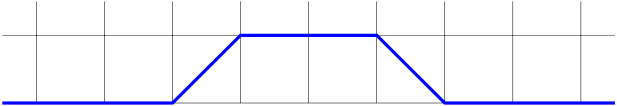
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$



$$g_1 := e_1/f$$

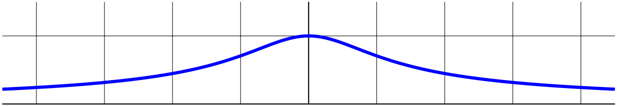


$$f\,g_1 = e_1$$

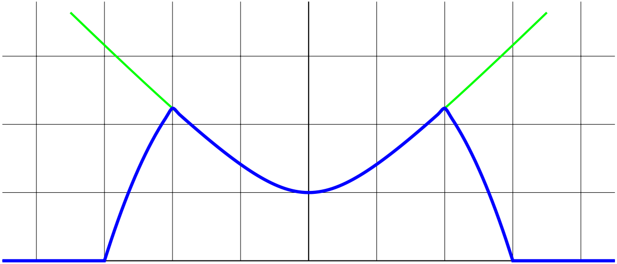


Ejemplo de elemento aproximadamente invertible en $C_0(\mathbb{R})$

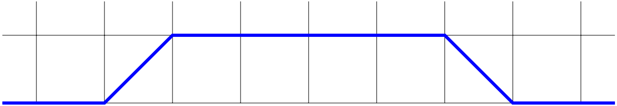
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$



$$g_2 := e_2/f$$



$$f\,g_2 = e_2$$

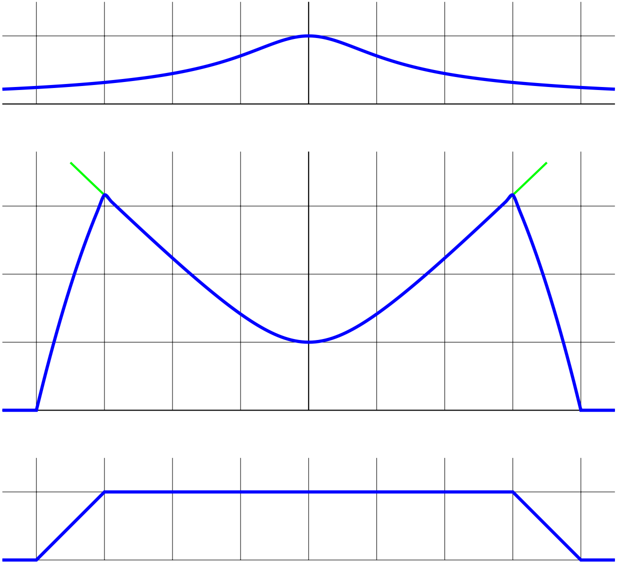


Ejemplo de elemento aproximadamente invertible en $C_0(\mathbb{R})$

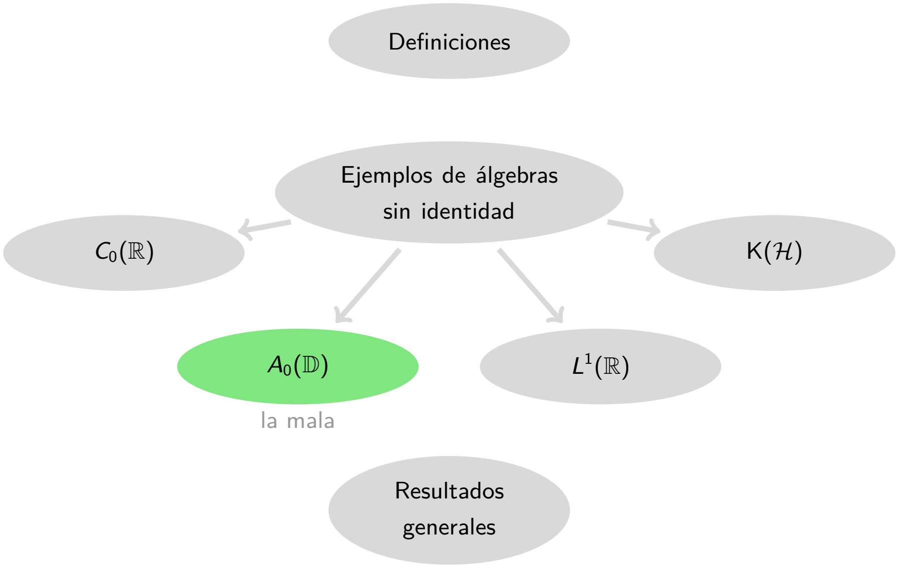
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$g_3 := e_3/f$$

$$f\,g_3 = e_3$$



Contenido


Definiciones
Ejemplos de álgebras sin identidad
$C_0(\mathbb{R})$
$\mathrm{K}(\mathcal{H})$
$A_0(\mathbb{D})$
la mala
$L^1(\mathbb{R})$
Resultados generales

Álgebra pequeña del disco

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}:\ \ |z| < 1\}.$$

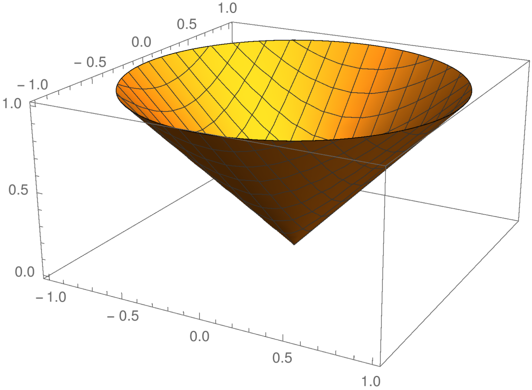
Denotemos por A_0 al álgebra de todas las funciones continuas $\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ que son holomorfas en $\mathbb{D}$ y se anulan en el punto 0:

$$A_0 := \big\{f \in C(\overline{\mathbb{D}}):\quad f|_{\mathbb{D}} \in H(\mathbb{D}) \quad \wedge \quad f(0) = 0\big\}.$$

A_0 es una subálgebra (sin identidad) cerrada de $C(\overline{\mathbb{D}})$.
Está generada por

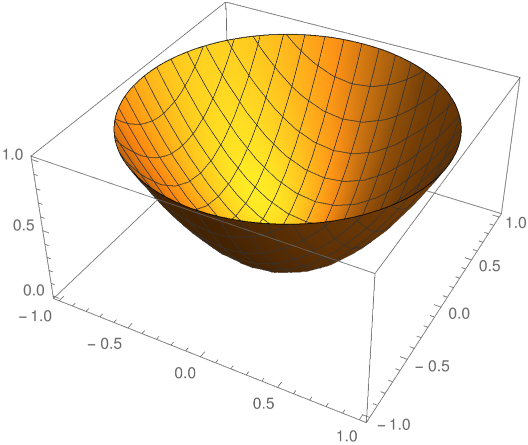
$$g(z) := z.$$

Generador del álgebra A_0



La gráfica del valor absoluto de $g(z) = z$

Ejemplo de un elemento del álgebra A_0



La gráfica del valor absoluto de $f(z) = z^2$

Propiedad principal de los elementos de A_0

Lema

Si $f \in A_0$, entonces para cada z en $\mathbb{D}$

$$|f(z)| \leq |z| \, \|f\|_\infty .$$

Demostración. Se sigue del lema de Schwarz. □

Lema

Para cada f en A_0,

$$\sup_{1/2 \leq |z| \leq 1} |f(z) - 1| \geq \frac{1}{3}.$$

Demostración. Si $\|f\|_\infty \geq \frac{4}{3}$, entonces $\sup_{|z|=1} |f(z) - 1| \geq \frac{1}{3}$.

Si $\|f\|_\infty \leq \frac{4}{3}$, entonces $|f(1/2)| \leq \frac{2}{3}$. □

Colapso de los ideales y pérdida de la identidad

Proposición

Ningún ideal principal es denso en A_0.

Proposición

El álgebra A_0 no tiene identidades aproximadas.

Contenido

Definiciones

Ejemplos de álgebras sin identidad

- $C_0(\mathbb{R})$
- $A_0(\mathbb{D})$
- $L^1(\mathbb{R})$ la guapa
- $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Resultados generales

Álgebra de convolución $L^1(\mathbb{R})$

Para cualesquiera dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ denotamos por $f * g$ su convolución:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\, dy.$$

$L^1(\mathbb{R})$ con la operación $*$ es un álgebra conmutativa sin identidad.

Para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ denotemos por $\widehat{f}$ la transformada de Fourier de f:

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-\mathrm{i}\, t\, x}\, dx.$$

La transformada de Fourier convierte $*$ en el producto puntual:

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}.$$

Sucesiones de Dirac

Definición

Una sucesión $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $L^1(\mathbb{R})$ es una *sucesión de Dirac* si:

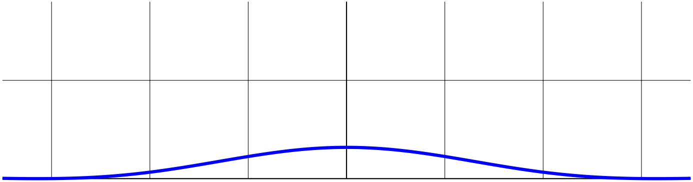
1. $e_j(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$;
2. para cada $j \in \mathbb{N}$,
$$\int_{\mathbb{R}} e_j(x)\,dx = 1;$$
3. para cada $\delta > 0$,
$$\lim_{j\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} e_j(x)\,dx = 0.$$

Cada sucesión de Dirac es una identidad aproximada en $L^1(\mathbb{R})$.

Ejemplo de una sucesión de Dirac

$$e_j(x) = \frac{(\sin(jx))^2}{\pi j x^2}.$$

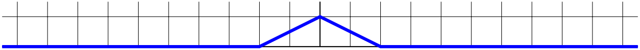
$j = 1$



En este ejemplo los soportes de $\widehat{e}_j$ son compactos:

$$\widehat{e}_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2j}, & |t| \leq 2j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

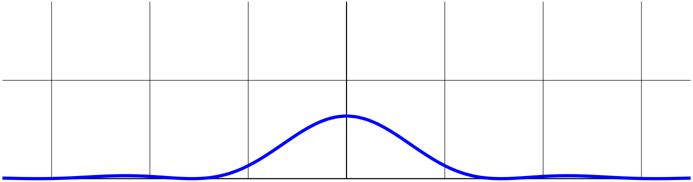
$j = 1$



Ejemplo de una sucesión de Dirac

$$e_j(x) = \frac{(\sin(jx))^2}{\pi j x^2}.$$

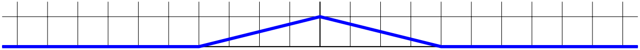
$j = 2$



En este ejemplo los soportes de $\widehat{e}_j$ son compactos:

$$\widehat{e}_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2j}, & |t| \le 2j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

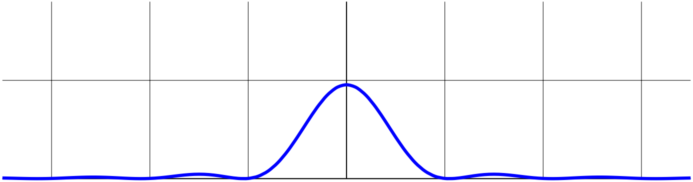
$j = 2$



Ejemplo de una sucesión de Dirac

$$e_j(x) = \frac{(\sin(jx))^2}{\pi j x^2}.$$

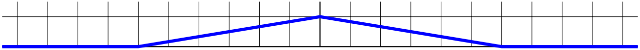
$j = 3$



En este ejemplo los soportes de $\widehat{e_j}$ son compactos:

$$\widehat{e_j}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2j}, & |t| \leq 2j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

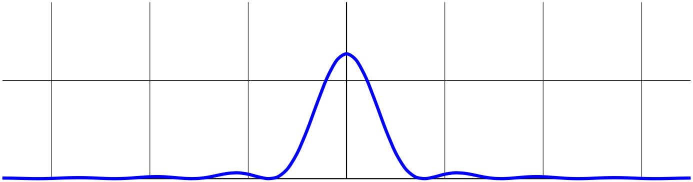
$j = 3$



Ejemplo de una sucesión de Dirac

$$e_j(x) = \frac{(\sin(jx))^2}{\pi j x^2}.$$

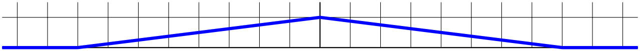
$j = 4$



En este ejemplo los soportes de $\widehat{e}_j$ son compactos:

$$\widehat{e}_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2j}, & |t| \leq 2j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

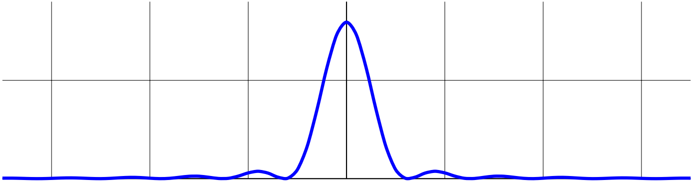
$j = 4$



Ejemplo de una sucesión de Dirac

$$e_j(x) = \frac{(\sin(jx))^2}{\pi j x^2}.$$

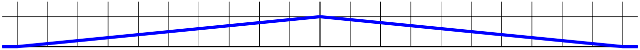
$j = 5$



En este ejemplo los soportes de $\widehat{e_j}$ son compactos:

$$\widehat{e_j}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2j}, & |t| \leq 2j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$j = 5$



Lema de División de Wiener

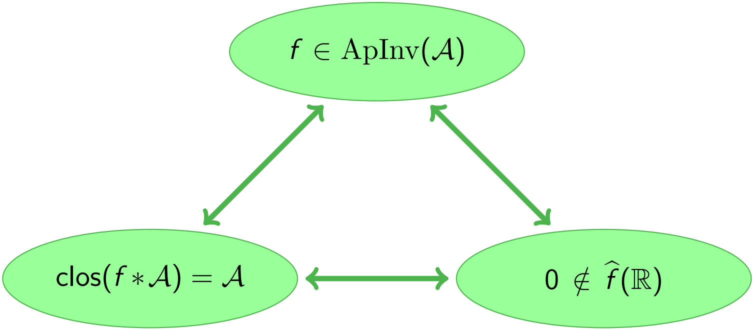
$f \in L^1(\mathbb{R})$
$\operatorname{supp}(\widehat{f})$ es compacto

$g \in L^1(\mathbb{R})$
$\forall x \in \operatorname{supp}(\widehat{f}) \quad \widehat{g}(x) \neq 0$

$\Longrightarrow$

$\exists h \in L^1(\mathbb{R})$
$f = g * h$

Criterio de la invertibilidad aproximada en $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R})$

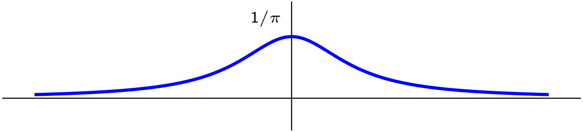


Demostración de la implicación $0 \notin \widehat{f}(\mathbb{R}) \implies f \in \mathrm{ApInv}(\mathcal{A})$**.**
Sea $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac con $\mathrm{supp}(\widehat{e_j})$ compactos.
Usando el Lema de División de Wiener construimos $g_j \in L^1(\mathbb{R})$ tales que

$$e_j = f * g_j. \qquad \square$$

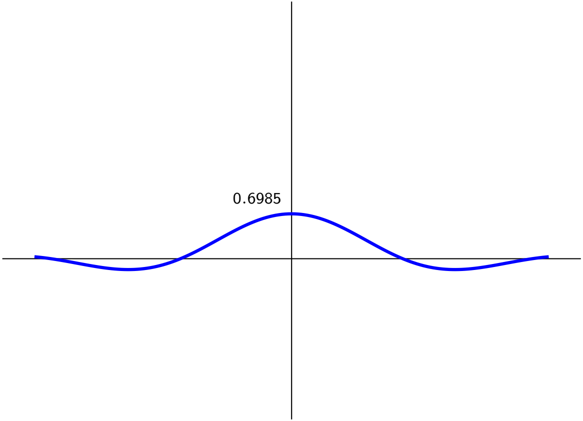
Ejemplo de un elemento en $\mathrm{ApInv}(L^1(\mathbb{R}))$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$



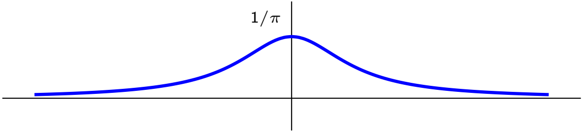
h_1 tal que

$f * h_1 = e_1$



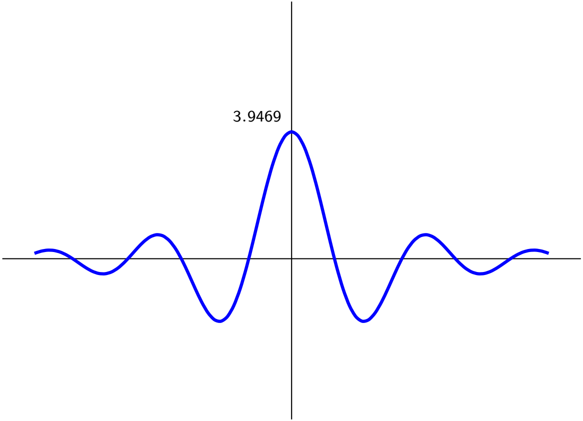
Ejemplo de un elemento en $\mathrm{ApInv}(L^1(\mathbb{R}))$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$



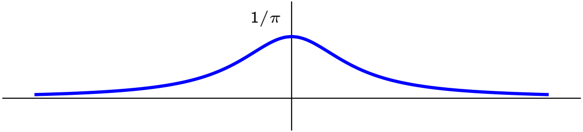
h_2 tal que

$f * h_2 = e_2$



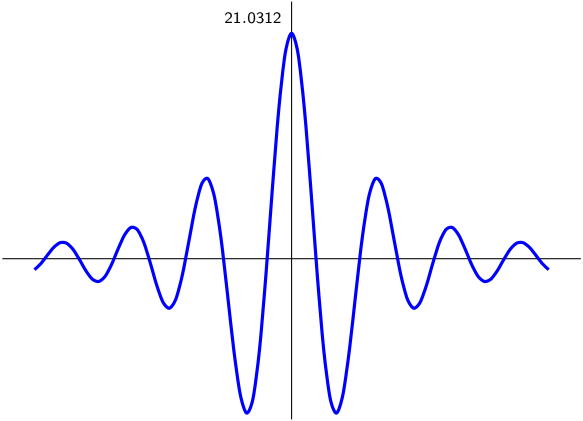
Ejemplo de un elemento en $\mathrm{ApInv}(L^1(\mathbb{R}))$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

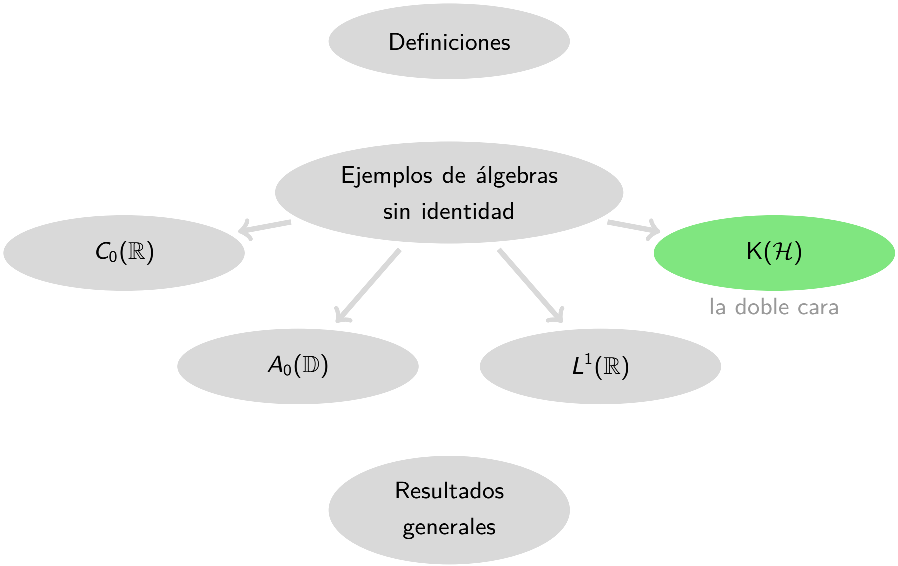


h_3 tal que

$f * h_3 = e_3$



Contenido


Definiciones
Ejemplos de álgebras sin identidad
$C_0(\mathbb{R})$
$\mathrm{K}(\mathcal{H})$
la doble cara
$A_0(\mathbb{D})$
$L^1(\mathbb{R})$
Resultados generales

Álgebra de operadores compactos en un espacio de Hilbert

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

$\mathrm{K}(\mathcal{H}) :=$ los operadores lineales compactos que actúan en $\mathcal{H}$.

Recordemos una propiedad importante de operadores compactos: si $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de operadores lineales acotados en $\mathcal{H}$, $S_n v \to 0$ para cada $v \in \mathcal{H}$ y $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$, entonces

$$\|S_n T\| \to 0, \qquad \|T S_n\| \to 0.$$

Identidad aproximada asociada a una base ortonormal

Sea $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces

$$\forall v \in \mathcal{H} \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, b_j \rangle b_j.$$

Para cada $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ definimos $P_m \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por la regla

$$P_m v := \sum_{j=1}^{m} \langle v, b_j \rangle \, b_j.$$

Por ejemplo,

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \ldots \qquad \mapsto \qquad P_2 v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2.$$

P_m es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{L}(b_1, \ldots, b_m)$.

Identidad aproximada asociada a una base ortonormal

$$P_m v := \sum_{j=1}^{m} \langle v, b_j \rangle \, b_j.$$

Proposición

$(P_m)_{m=1}^{\infty}$ *es una identidad aproximada en* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Demostración. La sucesión $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente al operador identidad I:

$$\forall v \in \mathcal{H} \qquad (P_m - I)v \to 0.$$

Por lo tanto, para cualquier $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$,

$$\|P_m T - T\| \to 0 \qquad \text{y} \qquad \|T P_m - T\| \to 0. \qquad \square$$

Descomposición en valores singulares de un operador compacto

Sea $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $r = \operatorname{rango}(T)$.
Se pone $r = +\infty$, si $T(\mathcal{H})$ no es de dimensión finita.
Entonces existen dos sucesiones ortonormales $(a_j)_{j=1}^r$ y $(b_j)_{j=1}^r$
y una sucesión de números positivos $(s_j)_{j=1}^r$ tales que

$$s_1 \ge s_2 \ge s_3 \ge \ldots > 0, \qquad \lim_{j\to\infty} s_j = 0,$$

$$Ta_1 = s_1 b_1, \qquad Ta_2 = s_2 b_2, \qquad Ta_3 = s_3 b_3, \qquad \ldots$$

Por consecuencia, para cada vector v en $\mathcal{H}$,

$$Tv = \sum_{j=1}^{r} s_j \langle v, a_j \rangle b_j.$$

Criterio de invertibilidad aproximada izquierda en $\mathsf{K}(\mathcal{H})$

Sea $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador compacto
que tiene la siguiente descomposición en valores singulares:

$$Tv = \sum_{j=1}^{r} s_j \langle v, a_j \rangle b_j.$$

Entonces

$$\begin{tikzcd}
 & (a_j)_{j=1}^{r} \text{ es total} \arrow[dd, leftrightarrow] \\
T \in \mathsf{ApInv}_L(\mathsf{K}(\mathcal{H})) \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
 & \ker(T) = \{0\}
\end{tikzcd}$$

Invertibilidad aproximada izquierda en $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Idea de la demostración

Supongamos que $\ker(T) = \{0\}$. Entonces $r = +\infty$ y $(a_j)_{j=1}^{+\infty}$ es total. Definimos U_m usando la descomposición de T en valores singulares:

T	U_3
$a_1 \mapsto s_1 b_1$	$b_1 \mapsto a_1/s_1$
$a_2 \mapsto s_2 b_2$	$b_2 \mapsto a_2/s_2$
$a_3 \mapsto s_3 b_3$	$b_3 \mapsto a_3/s_3$
$a_4 \mapsto s_4 b_4$	$b_4 \mapsto 0$
$a_5 \mapsto s_5 b_5$	$b_5 \mapsto 0$
$\ldots$	$\ldots$

Invertibilidad aproximada izquierda en $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Idea de la demostración

Supongamos que $\ker(T) = \{0\}$. Entonces $r = +\infty$ y $(a_j)_{j=1}^{+\infty}$ es total.
Definimos U_m usando la descomposición de T en valores singulares:

T	U_3
$a_1 \mapsto s_1 b_1$	$b_1 \mapsto a_1/s_1$
$a_2 \mapsto s_2 b_2$	$b_2 \mapsto a_2/s_2$
$a_3 \mapsto s_3 b_3$	$b_3 \mapsto a_3/s_3$
$a_4 \mapsto s_4 b_4$	$b_4 \mapsto 0$
$a_5 \mapsto s_5 b_5$	$b_5 \mapsto 0$
$\ldots$	$\ldots$

Calculemos $U_3 T$:

Invertibilidad aproximada izquierda en $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Idea de la demostración

Supongamos que $\ker(T) = \{0\}$. Entonces $r = +\infty$ y $(a_j)_{j=1}^{+\infty}$ es total.
Definimos U_m usando la descomposición de T en valores singulares:

T	U_3	Calculemos $U_3 T$:
$a_1 \mapsto s_1 b_1$	$b_1 \mapsto a_1/s_1$	$a_1 \mapsto a_1$
$a_2 \mapsto s_2 b_2$	$b_2 \mapsto a_2/s_2$	
$a_3 \mapsto s_3 b_3$	$b_3 \mapsto a_3/s_3$	
$a_4 \mapsto s_4 b_4$	$b_4 \mapsto 0$	
$a_5 \mapsto s_5 b_5$	$b_5 \mapsto 0$	
$\ldots$	$\ldots$	

Invertibilidad aproximada izquierda en K($\mathcal{H}$)

Idea de la demostración

Supongamos que $\ker(T) = \{0\}$. Entonces $r = +\infty$ y $(a_j)_{j=1}^{+\infty}$ es total.
Definimos U_m usando la descomposición de T en valores singulares:

T	U_3	Calculemos $U_3 T$:
$a_1 \mapsto s_1 b_1$	$b_1 \mapsto a_1/s_1$	$a_1 \mapsto a_1$
$a_2 \mapsto s_2 b_2$	$b_2 \mapsto a_2/s_2$	$a_2 \mapsto a_2$
$a_3 \mapsto s_3 b_3$	$b_3 \mapsto a_3/s_3$	
$a_4 \mapsto s_4 b_4$	$b_4 \mapsto 0$	
$a_5 \mapsto s_5 b_5$	$b_5 \mapsto 0$	
$\ldots$	$\ldots$	

Supongamos que $\ker(T) = \{0\}$. Entonces $r = +\infty$ y $(a_j)_{j=1}^{+\infty}$ es total.
Definimos U_m usando la descomposición de T en valores singulares:

T	U_3	Calculemos $U_3 T$:
$a_1 \mapsto s_1 b_1$	$b_1 \mapsto a_1/s_1$	$a_1 \mapsto a_1$
$a_2 \mapsto s_2 b_2$	$b_2 \mapsto a_2/s_2$	$a_2 \mapsto a_2$
$a_3 \mapsto s_3 b_3$	$b_3 \mapsto a_3/s_3$	$a_3 \mapsto a_3$
$a_4 \mapsto s_4 b_4$	$b_4 \mapsto 0$	
$a_5 \mapsto s_5 b_5$	$b_5 \mapsto 0$	
$\dots$	$\dots$	

Invertibilidad aproximada izquierda en $K(\mathcal{H})$

Idea de la demostración

Supongamos que $\ker(T) = \{0\}$. Entonces $r = +\infty$ y $(a_j)_{j=1}^{+\infty}$ es total.
Definimos U_m usando la descomposición de T en valores singulares:

T	U_3	Calculemos $U_3 T$:
$a_1 \mapsto s_1 b_1$	$b_1 \mapsto a_1/s_1$	$a_1 \mapsto a_1$
$a_2 \mapsto s_2 b_2$	$b_2 \mapsto a_2/s_2$	$a_2 \mapsto a_2$
$a_3 \mapsto s_3 b_3$	$b_3 \mapsto a_3/s_3$	$a_3 \mapsto a_3$
$a_4 \mapsto s_4 b_4$	$b_4 \mapsto 0$	$a_4 \mapsto 0$
$a_5 \mapsto s_5 b_5$	$b_5 \mapsto 0$	
$\dots$	$\dots$	

Invertibilidad aproximada izquierda en $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Idea de la demostración

Supongamos que $\ker(T) = \{0\}$. Entonces $r = +\infty$ y $(a_j)_{j=1}^{+\infty}$ es total. Definimos U_m usando la descomposición de T en valores singulares:

T	U_3	Calculemos $U_3 T$:
$a_1 \mapsto s_1 b_1$	$b_1 \mapsto a_1/s_1$	$a_1 \mapsto a_1$
$a_2 \mapsto s_2 b_2$	$b_2 \mapsto a_2/s_2$	$a_2 \mapsto a_2$
$a_3 \mapsto s_3 b_3$	$b_3 \mapsto a_3/s_3$	$a_3 \mapsto a_3$
$a_4 \mapsto s_4 b_4$	$b_4 \mapsto 0$	$a_4 \mapsto 0$
$a_5 \mapsto s_5 b_5$	$b_5 \mapsto 0$	$a_5 \mapsto 0$
$\ldots$	$\ldots$	

Entonces $U_m T =$

Invertibilidad aproximada izquierda en $K(\mathcal{H})$

Idea de la demostración

Supongamos que $\ker(T) = \{0\}$. Entonces $r = +\infty$ y $(a_j)_{j=1}^{+\infty}$ es total.
Definimos U_m usando la descomposición de T en valores singulares:

T	U_3	Calculemos $U_3 T$:
$a_1 \mapsto s_1 b_1$	$b_1 \mapsto a_1/s_1$	$a_1 \mapsto a_1$
$a_2 \mapsto s_2 b_2$	$b_2 \mapsto a_2/s_2$	$a_2 \mapsto a_2$
$a_3 \mapsto s_3 b_3$	$b_3 \mapsto a_3/s_3$	$a_3 \mapsto a_3$
$a_4 \mapsto s_4 b_4$	$b_4 \mapsto 0$	$a_4 \mapsto 0$
$a_5 \mapsto s_5 b_5$	$b_5 \mapsto 0$	$a_5 \mapsto 0$
$\ldots$	$\ldots$	

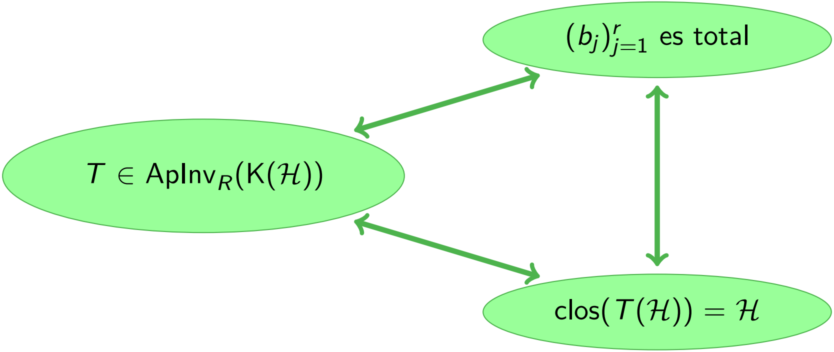
Entonces $U_m T = P_m$, así que $(U_m T)_{m=1}^{\infty}$ es una identidad aproximada.

Invertibilidad aproximada derecha en $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Sea $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador compacto
que tiene la siguiente descomposición en valores singulares:

$$Tv = \sum_{j=1}^{r(T)} s_j \langle v, a_j \rangle b_j.$$

Entonces



Contenido

Definiciones

Ejemplos de álgebras sin identidad

$C_0(\mathbb{R})$

$A_0(\mathbb{D})$

$L^1(\mathbb{R})$

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Resultados generales

Resumen para la situación conmutativa

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y sea $x \in \mathcal{A}$.
$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$:= el espacio de caracteres de $\mathcal{A}$.
$\widehat{x}$:= la transformada de Gelfand de x.

$$
\begin{tikzcd}
x \in \mathrm{ApInv}(\mathcal{A}) \arrow[d] \\
\mathrm{clos}(x\mathcal{A}) = \mathcal{A} \arrow[d] \arrow[u, bend right=60, "\text{si } \mathcal{A} \text{ es aprox. unitaria}"'] \\
0 \notin \widehat{x}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})
\end{tikzcd}
$$

Situación no conmutativa, ideales maximales modulares

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Un ideal derecho J se llama modular si existe un elemento v en $\mathcal{A}$ tal que

$$\forall x \in \mathcal{A} \qquad vx - x \in J.$$

Se sabe que cada ideal modular derecho está contenido en un ideal modular derecho maximal.

Resumen para la situación no conmutativa

Sean $\mathcal{A}$ un álgebra normada no unitaria, $x \in \mathcal{A}$.
Los resultados son ciertos también para álgebras topológicas.

$$\begin{tikzcd}
x \in \mathrm{ApInv}_R(\mathcal{A}) \arrow[d] \\
\operatorname{clos}(x\mathcal{A}) = \mathcal{A} \arrow[u, bend right, "\text{si } \mathcal{A} \text{ es aprox. unitaria}"'] \arrow[d] \\
x \text{ no pertenece a ningún ideal modular maximal derecho}
\end{tikzcd}$$

Relación con los divisores topológicos de cero

$\mathcal{A}$ un álgebra de Banach
no unitaria

$x \in \mathrm{ApInv}_R(\mathcal{A})$

existe una red $(z_j)_{j \in J}$
tal que $z_j \not\to 0$,
$xz_j \to 0$

Problema 1: álgebra que no sea aproximadamente unitaria, pero que tenga algunos ideales principales densos

Encontrar un álgebra de Banach (o un álgebra topológica) $\mathcal{A}$ con las siguientes dos propiedades:

1. no existe ninguna identidad aproximada en $\mathcal{A}$;
2. existe un x en $\mathcal{A}$ tal que $\operatorname{clos}(x\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Problema 2: invertibilidad aproximada bilateral

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada no unitaria y sea $x \in \mathcal{A}$.

Supongamos que $x \in \mathsf{ApInv}_L(\mathcal{A}) \cap \mathsf{ApInv}_R(\mathcal{A})$:

- existe una red $(\ell_j)_{j\in J}$ tal que $(\ell_j x)_{j\in J}$ es una identidad aproximada;
- existe una red $(r_k)_{k\in K}$ tal que $(x r_k)_{k\in K}$ es una identidad aproximada.

¿Podemos construir una red $(y_p)_{p\in P}$ tal que ambas redes

$$(xy_p)_{p\in P}, \qquad (y_p x)_{p\in P}$$

sean identidades aproximadas?

Problema 3: situación en álgebras C*

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* no conmutativa no unitaria.

¿Se puede describir $\mathrm{ApInv}_R(\mathcal{A})$
en términos de ideales modulares derechos maximales?

Conclusiones

La invertibilidad aproximada es. . .

Conclusiones

La invertibilidad aproximada es. . .

Conclusiones

La invertibilidad aproximada es. . .

. . . una generalización de la invertibilidad;

Conclusiones

La invertibilidad aproximada es. . .

. . . una generalización de la invertibilidad;

. . . una herramienta para estudiar
la densidad de los ideales principales;

Conclusiones

La invertibilidad aproximada es. . .

. . . una generalización de la invertibilidad;

. . . una herramienta para estudiar la densidad de los ideales principales;

. . . algo fuera de los ideales maximales modulares.