Operadores radiales de Toeplitz en el espacio de Bergman sobre la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$

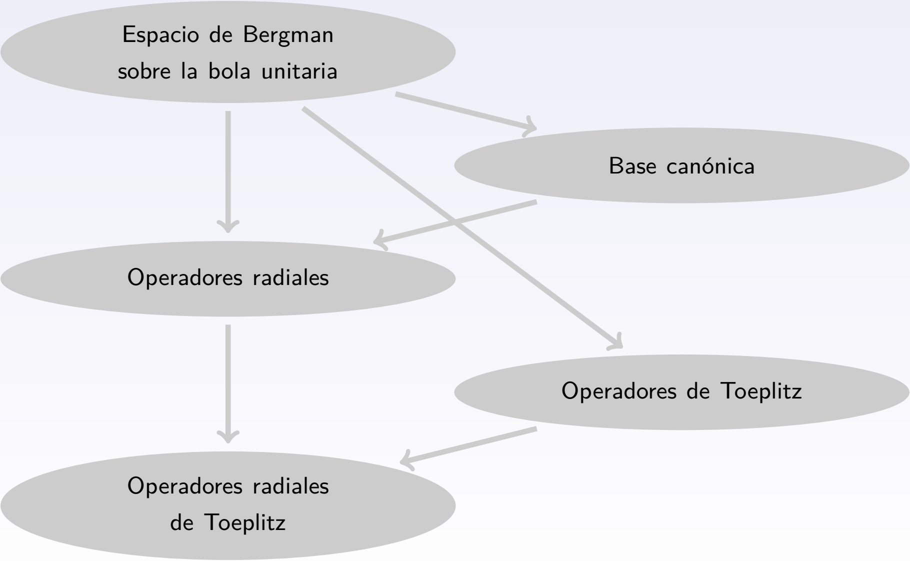
Egor Maximenko

junto con
Nikolai Vasilevski y Sergey Grudsky

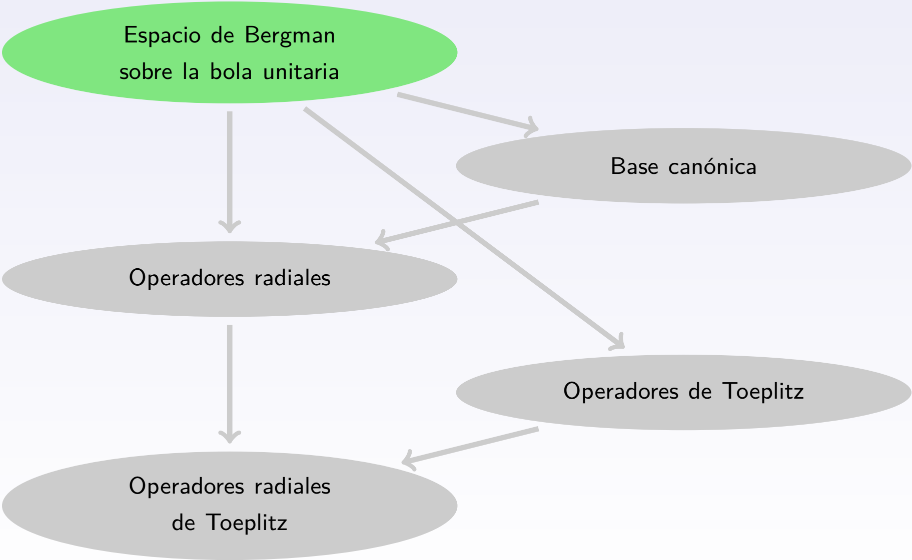
Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Seminario "Análisis Complejo e Hipercomplejo"
ESFM del IPN, 6 de septiembre de 2012

Contenido


Espacio de Bergman sobre la bola unitaria
Base canónica
Operadores radiales
Operadores de Toeplitz
Operadores radiales de Toeplitz

Contenido


Espacio de Bergman sobre la bola unitaria
Base canónica
Operadores radiales
Operadores de Toeplitz
Operadores radiales de Toeplitz

Bola unitaria y esfera unitaria en $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{C}^n = \Big\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \colon \; z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \Big\}.$$

Producto interno canónico y norma canónica en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}, \qquad \|z\|^2 := \sqrt{\langle z, z \rangle}.$$

Bola unitaria y esfera unitaria en $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{B}^n := \{ z \in \mathbb{C}^n \colon \; \|z\| < 1 \}, \qquad \partial\mathbb{B}^n = \{ z \in \mathbb{C}^n \colon \; \|z\| = 1 \}.$$

Grupo ortogonal $\mathcal{O}_{2n}$ y grupo unitario $\mathcal{U}_n$

El grupo ortogonal $\mathcal{O}_{2n}$ consiste en los operadores real-lineales en $\mathbb{R}^{2n}$ que preservan la norma euclidiana $\|\cdot\|$:

$$\mathcal{O}_{2n} \;:=\; \left\{\, Q \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}\colon\;\; Q^\top Q = I \,\right\}.$$

El grupo unitario $\mathcal{U}_n$ consiste en los operadores complejo-lineales en $\mathbb{C}^n$ que preservan la norma euclidiana $\|\cdot\|$:

$$\mathcal{U}_n \;:=\; \left\{\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}\colon\;\; U^* U = I \,\right\}.$$

El grupo $\mathcal{U}_n$ se puede considerar como un subgrupo de $\mathcal{O}_{2n}$.

Ejemplos de matrices unitarias ($n = 4$)

Multiplicación de una coordenada por $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$:

$$\operatorname{diag}(1, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rotación en dos coordenadas (complejas):

$$\operatorname{Jacobi}(2, 4, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Medidas normalizadas en $\mathbb{B}^n$ y $\partial\mathbb{B}^n$

dv := la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$
normalizada de tal manera que $v(\mathbb{B}^n) = 1$.

$$dv = \frac{n!}{\pi^n} dx_1 dy_1 \cdots dx_n dy_n.$$

$d\sigma$:= la medida de la superficie $\partial\mathbb{B}^n$
normalizada de tal manera que $\sigma(\partial\mathbb{B}^n) = 1$.

Notemos que dv y $d\sigma$ son invariantes bajo la acción del grupo $\mathcal{O}_{2n}$:
para todos conjuntos medibles $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \partial\mathbb{B}^n$
y todo operador ortogonal $Q \in \mathcal{O}_{2n}$,

$$v(QX) = v(X), \qquad \sigma(QY) = \sigma(Y).$$

Espacio de Bergman sobre la bola unitaria

$L^2(\mathbb{B}^n) := L^2(\mathbb{B}^n, dv) :=$ el espacio de las funciones cuadrado integrables, con el producto interno común y la norma inducida:

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{B}^n} f\,\overline{g}\,dv, \qquad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Una función $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ se llama *holomorfa* si en cada punto de $\mathbb{B}^n$ existen derivadas parciales de f respecto a cada una de n variables complejas.

$\mathcal{A}(\mathbb{B}^n) :=$ las funciones holomorfas $\mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \; := \; L^2(\mathbb{B}^n) \cap \mathcal{A}(\mathbb{B}^n)$, se llama el espacio de Bergman sobre $\mathbb{B}^n$.

Núcleo de Bergman

Para todo $z \in \mathbb{B}^n$ consideremos el funcional de evaluación en el punto z:

$$\mathrm{eval}_z \colon \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \to \mathbb{C}, \qquad \mathrm{eval}_z(f) := f(z).$$

Se puede demostrar que para todo compacto $K \subset \mathbb{B}^n$
existe un número $C_K > 0$ tal que

$$\forall f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \qquad \sup_{z \in K} |f(z)| \le C_K \|f\|_2.$$

De aquí sigue que $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{B}^n)$
y que para todo $z \in \mathbb{B}^n$ el funcional eval_z es continuo.

Por el teorema de Riesz-Fisher existe una función $K_z \in \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ tal que

$$\forall f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \qquad \mathrm{eval}_z(f) = \langle f, K_z \rangle.$$

La función K_z se llama el núcleo de Bergman en el punto z.

Proyección de Bergman

$\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{B}^n)$.

Por lo tanto, existe una proyección ortogonal P de $L^2(\mathbb{B}^n)$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$. Esta proyección se llama la proyección de Bergman.

La proyección de Bergman P se puede expresar a través del núcleo de Bergman K_z:

$$\forall z \in \mathbb{B}^n \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{B}^n) \qquad (Pf)(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Demostración:

$$(Pf)(z) = \langle Pf, K_z \rangle = \langle f, PK_z \rangle = \langle f, K_z \rangle.$$

Libros para estudiar espacios de funciones holomorfas

Bergman, Stefan (1970).
The Kernel Function and Conformal Mapping.
AMS. In series: Mathematical Surveys.

Rudin, Walter (1980, 2008).
Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$.
Springer-Verlag. In series: Classics in Mathematics.

Zhu, Kehe (2004).
Spaces of Holomorphic Functions on the Unit Ball.
Springer-Verlag. In series: Graduate Texts in Mathematics.

Zhu, Kehe (2007).
Operator Theory in Function Spaces.
AMS. In series: Mathematical Surveys and Monographs.

Stefan Bergman (1895–1977)

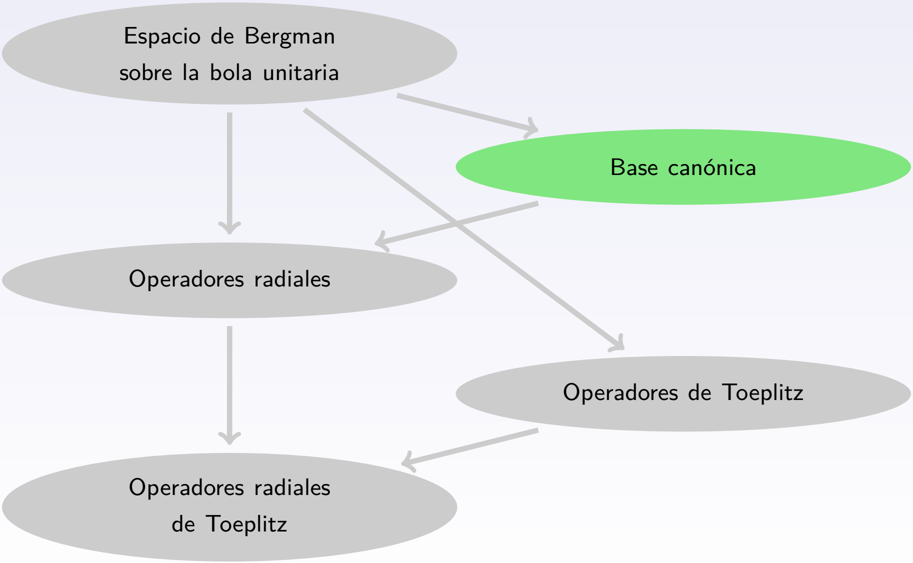
Nació en Polonia.

Obtuvo Ph.D. en Berlin en 1921.

En 1933 emigró a Rusia,
en 1939 a Francia
y en el mismo año a Estados Unidos.

Trabajó durante muchos años
en la universidad de Stanford.

Contenido


Espacio de Bergman
sobre la bola unitaria
Base canónica
Operadores radiales
Operadores de Toeplitz
Operadores radiales
de Toeplitz

Multi-índices

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
se definen la norma de α y el factorial de α:

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad \alpha! := \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y todo $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$
se define la potencia z^α:

$$z^\alpha := \prod_{j=1}^{n} z_j^{\alpha_j} = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Base canónica en $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$

Propiedades de las funciones z^α:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \qquad \displaystyle\int_{\mathbb{B}^n} z^\alpha \overline{z}^\beta \, dv(z) = \begin{cases} \frac{n!\,\alpha!}{(n+|\alpha|)!}, & \text{si } \alpha = \beta; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$
- Para toda función $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$,

$$\left(\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \int_{\mathbb{B}^n} f(z)\, \overline{z}^\alpha \, dv(z) = 0 \right) \quad \Longrightarrow \quad f = 0.$$

Denotemos por e_α, donde $\alpha \in \mathbb{N}^n$, los monomios normalizados:

$$e_\alpha(z) := \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\,\alpha!}}\, z^\alpha.$$

De las propiedades escritas arriba sigue que la familia $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$.
Esta base se llama la base canónica de $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$.

Proyecciones básicas en $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$

Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, denotemos por P_α la proyección ortogonal sobre e_α:

$$P_\alpha \colon \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n),$$

$$P_\alpha f := \langle f, e_\alpha \rangle \, e_\alpha.$$

Como $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ es una base ortonormal de $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$,
toda función $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ se descompone en la siguiente serie
que converge en la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_2$:

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} P_\alpha f.$$

Fórmula explícita para el núcleo de Bergman

En general, si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones $D \to \mathbb{C}$
y (e_α) es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces para todo $z \in D$ la función

$$\boxed{K_z(w) := \sum_{\alpha} \overline{e_\alpha(z)}\, e_\alpha(w)}$$

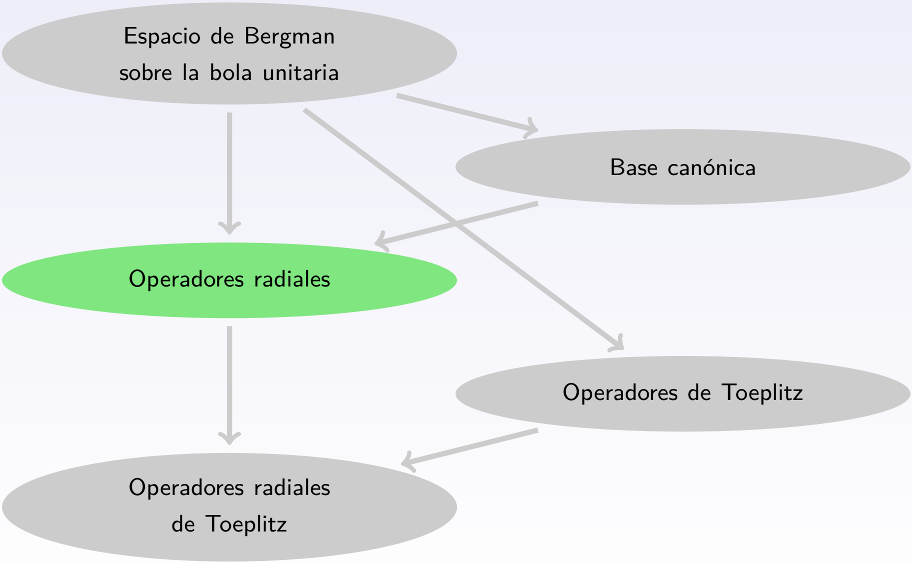
es un núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}$ en el punto z:

$$\forall f \in \mathcal{H} \quad \forall z \in D \qquad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

En el caso del espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$,

$$K_z(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \overline{e_\alpha(z)} e_\alpha(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(n + |\alpha|)!}{n!\, \alpha!}\, \overline{z}^\alpha w^\alpha = \boxed{\frac{1}{(1 - \langle w, z \rangle)^{n+1}}}.$$

Contenido


Espacio de Bergman
sobre la bola unitaria
Base canónica
Operadores radiales
Operadores de Toeplitz
Operadores radiales
de Toeplitz

Acción del grupo unitario sobre el espacio de Bergman

Para toda matriz unitaria $U \in \mathcal{U}_n$ definimos
el "operador de cambio de variables" correspondiente a la matriz U:

$$\Psi_U \colon \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}^2,$$

$$(\Psi_U f)(z) := f(U^* z).$$

Entonces Ψ_U es un operador unitario (una isometría lineal) en $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$,
y para todas $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_n$,

$$\Psi_{U_1 U_2} = \Psi_{U_1} \Psi_{U_2}.$$

Funciones radiales en $\mathbb{B}^n$ y operadores radiales en $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$

Una función $f \in L^1(\mathbb{B}^n)$ se llama radial
si es invariante bajo la acción del grupo $\mathcal{U}_n$:

$$f \text{ es radial} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall U \in \mathcal{U}_n \quad f(U^* z) = f(z) \quad \text{c.t.p. } z \in \mathbb{B}^n.$$

Para una función continua $f \in C(\mathbb{B}^n)$ esto significa
que $f(z)$ depende solamente del “radio” de z:

$$f \text{ es radial} \quad \iff \quad \forall z \in \mathbb{B}^n \quad f(z) = f(\|z\|).$$

Un operador lineal acotado $S\colon \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ se llama radial
si conmuta con Ψ_U para toda matriz unitaria U:

$$S \text{ es radial} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall U \in \mathcal{U}_n \quad S\Psi_U = \Psi_U S.$$

Operador radial asociado a una sucesión acotada

Dada una sucesión acotada $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$,
definimos el operador $R_\lambda\colon\ \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ mediante la regla:

$$R_\lambda f := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \lambda_{|\alpha|} P_\alpha f.$$

Por ejemplo, si $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} R_\lambda f &= \lambda_0 P_{(0,0)} f \\ &\quad + \lambda_1 P_{(1,0)} f + \lambda_1 P_{(0,1)} f \\ &\quad + \lambda_2 P_{(2,0)} f + \lambda_2 P_{(1,1)} f + \lambda_2 P_{(0,2)} f + \ldots. \end{aligned}$$

Notemos que:

- R_λ es diagonal respecto a la base canónica;
- el valor propio asociado a e_α depende solamente de $|\alpha|$.

Además se puede ver que R_λ es un operador radial.

Criterio de operador radial en $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$

Teorema

Sea $S\colon \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ *un operador lineal acotado.*
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- S *es radial;*
- *existe una sucesión acotada* $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *tal que* $S = R_\lambda$.

En otras palabras, un operador lineal acotado S es radial si, y sólo si, tiene las siguientes dos propiedades:

- es diagonal respecto a la base canónica $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$;
- el valor propio de S asociado a e_α depende solamente de $|\alpha|$.

Herramientas que se usan en la demostración

Dado un operador lineal acotado $S\colon \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$, su transformada de Berezin es una función $\mathcal{B}(S)\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\mathcal{B}(S)(z) := \frac{\langle SK_z, K_z \rangle}{\|K_z\|_2}.$$

La radialización de una función $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$:

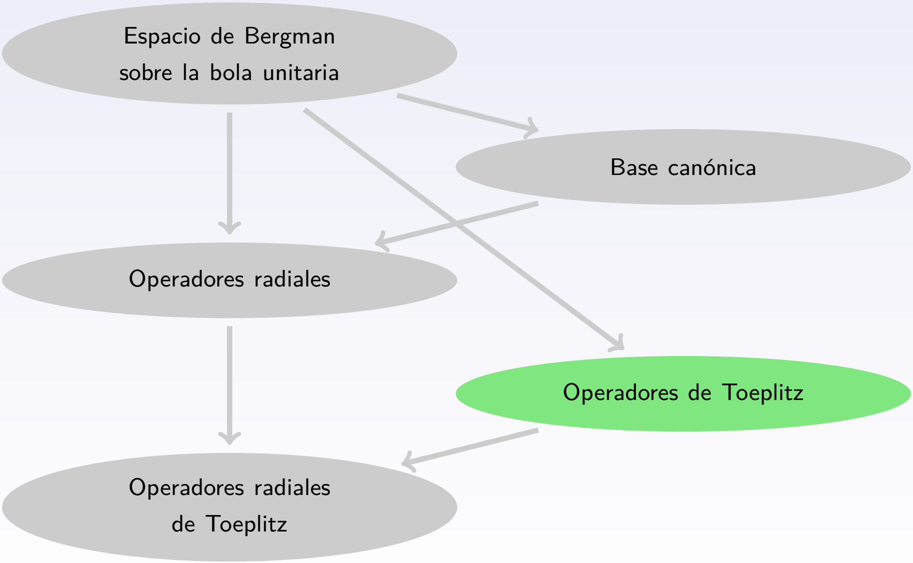
$$\operatorname{rad}(f)(z) := \int_{\mathcal{U}_n} (\Psi_U f)(z)\, dH(U),$$

donde dH es la medida de Haar sobre el grupo compacto $\mathcal{U}_n$.

La radialización de un operador lineal acotado $S\colon \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$:

$$\operatorname{Rad}(S)(f) := \int_{\mathcal{U}_n} \Psi_U S \Psi_{U^*} f\, dH(U).$$

Contenido



Espacio de Bergman sobre la bola unitaria
Base canónica
Operadores radiales
Operadores de Toeplitz
Operadores radiales de Toeplitz

Operador de multiplicación por una sucesión acotada

Sea $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.
Definimos $M_\lambda \colon \ell^2 \to \ell^2$ mediante la regla

$$M_\lambda x := \lambda x = (\lambda_j x_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

El operador M_λ tiene propiedades muy simples:

- $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$.
- Si $\lambda, \mu \in \ell^\infty$, entonces $M_{\lambda\mu} = M_\lambda M_\mu$.
- El espectro puntual de M_λ es el conjunto $\{\lambda_j\colon\ j\in\mathbb{N}\}$.
- El espectro de M_λ es la cerradura del conjunto $\{\lambda_j\colon\ j\in\mathbb{N}\}$.

Operadores de multiplicación en $L^2(\mathbb{B}^n)$

Dada una función $g \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, podemos definir
el operador de multiplicación por g en el espacio $L^2(\mathbb{B}^n)$:

$$f \mapsto gf.$$

La norma y el espectro de este operador se expresan
a través de la norma y los valores esenciales de la función g.

Si $g \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, entonces la misma regla

$$f \mapsto gf$$

ya no se puede aplicar en el espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$
porque el producto gf no necesariamente es una función holomorfa.

Operadores de Toeplitz en $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$

Dada una función $g \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, el operador de Toeplitz $T_g \colon \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ se define mediante la regla:

$$T_g f := P(gf).$$

Algunas propiedades de T_g:

- T_g es lineal.
- $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$.
- $T_{\mu g + \nu h} = \mu T_g + \nu T_h$.
- $T_{\overline{g}} = T_g^*$.

En general, no es fácil calcular la norma ni el espectro de T_g. Además, el producto $T_g T_h$ no siempre es un operador de Toeplitz.

Otto Toeplitz (1881–1940)

Su padre y su abuelo eran maestros de matemáticas.

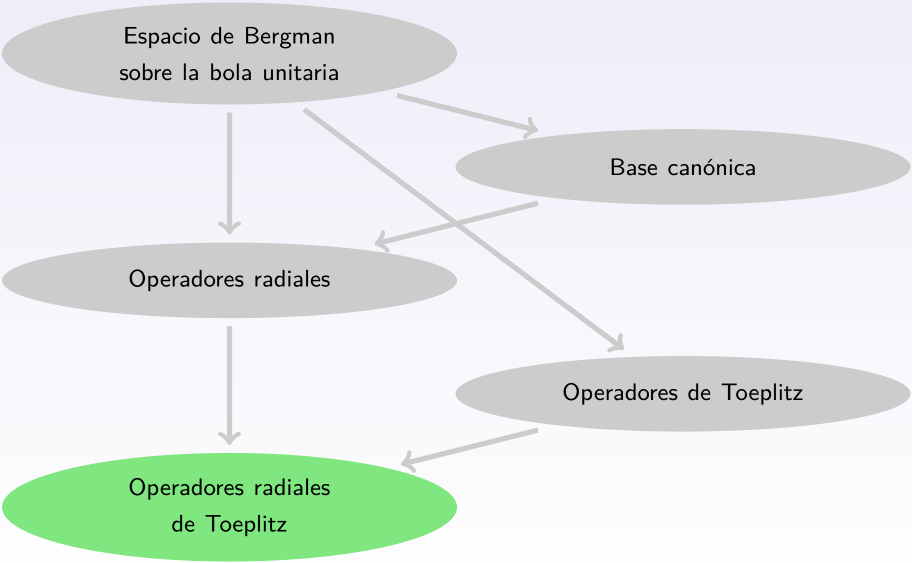
Estudió y se doctoró en Breslau (1905).

Trabajó en el grupo de David Hilbert en Göttingen (1906–1913).

Trabajó en Kiel y en Bonn.

En 1939 emigró a Jerusalem.

Contenido


Espacio de Bergman
sobre la bola unitaria
Base canónica
Operadores radiales
Operadores de Toeplitz
Operadores radiales
de Toeplitz

Criterio de operadores radiales de Toeplitz

Zhou, Ze-Hua and Chen, Wei-Li and Dong, Xing-Tang (2011).
The Berezin transform and radial operators
on the Bergman space of the unit ball.
Complex Analysis and Operator Theory.
http://dx.doi.org/10.1007/s11785-011-0145-2

Teorema (Zhou, Chen, Dong 2001)

Sea $g \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$. Entonces

$$T_g \text{ es radial} \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ es radial.}$$

La condición que g es radial significa que existe una función $a \in L^\infty[0,1]$ tal que

$$g(z) = a(\|z\|) \qquad \text{c.t.p. } z \in \mathbb{B}^n.$$

Sucesión de valores propios de un operador de Toeplitz radial

Grudsky, Sergei; Karapetyants, Alexei; Vasilevski, Nikolai (2003).
Toeplitz operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with radial symbols.
Journal of Operator Theory.

Teorema (Grudsky, Karapetyants, Vasilevski 2003)

Sea $a \in L^\infty[0,1]$. Definimos $g(z) := a(\|z\|)$.
Entonces el operador T_g es radial: $T_g = R_{\gamma_{n,a}}$,
y la sucesión $\gamma_{n,a}$ de los valores propios se calcula mediante la fórmula:

$$\gamma_{n,a}(j) = (n+j) \int_0^1 a(\sqrt{r}\,)\, r^{n+j-1}\, dr.$$

Conjunto de las sucesiones de valores propios de operadores de Toeplitz radiales

Si $a \in L^\infty[0,1]$ y $g(z) := a(\|z\|)$,
entonces muchas propiedades del operador T_g
se reflejan en las propiedades de la sucesión $\gamma_{n,a}$:

$$\|T_g\| = \|\gamma_{n,a}\|_\infty, \qquad \mathsf{sp}\, T_g = \mathsf{Clos}(\mathrm{Im}(\gamma_{n,a})), \qquad \text{etc.}$$

Por eso en vez de trabajar con operadores radiales de Toeplitz
uno puede trabajar con las sucesiones $\gamma_{n,a}$:

$$\gamma_{n,a}(j) = (n+j) \int_0^1 a(\sqrt{r}\,)\, r^{n+j-1}\, dr.$$

Denotamos por Γ_n al conjunto de todas estas sucesiones:

$$\boxed{\Gamma_n := \{\gamma_{n,a} : \ a \in L^\infty[0,1]\}.}$$

Problemas abiertos y problemas resueltos

$$\gamma_{n,a}(j) = (n+j)\int_0^1 a(\sqrt{r})\, r^{n+j-1}\, dr.$$

$$\Gamma_n := \{\gamma_{n,a} : \ a \in L^\infty[0,1]\}.$$

Problemas:

(A) Sea $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.
¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que $\lambda \in \Gamma_n$?.

(B) ¿Cuál es la cerradura de Γ_n en ℓ^∞?.

(C) ¿Cuál es la subálgebra cerrada de ℓ^∞ generada por Γ_n?.

Problemas abiertos y problemas resueltos

$$\gamma_{n,a}(j) = (n+j)\int_0^1 a(\sqrt{r}\,)\, r^{n+j-1}\, dr.$$

$$\Gamma_n := \{\gamma_{n,a}\colon \ a \in L^\infty[0,1]\}.$$

Problemas:

(A) Sea $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.
¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que $\lambda \in \Gamma_n$?.

(B) ¿Cuál es la cerradura de Γ_n en ℓ^∞?.

(C) ¿Cuál es la subálgebra cerrada de ℓ^∞ generada por Γ_n?.

Resulta que las preguntas (B) y (C) tienen la misma respuesta:

las sucesiones lentamente oscilantes.

Sucesiones lentamente oscilantes

"Métrica logarítmica" en $\mathbb{N}$:

$$\rho(j,k) := \big|\ln(j+1) - \ln(k+1)\big| = \ln \frac{\max\{j+1, k+1\}}{\min\{j+1, k+1\}}.$$

Módulo de continuidad de una sucesión $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ respecto ρ:

$$\omega_{\rho,\lambda}\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty),$$

$$\omega_{\rho,\lambda}(\delta) := \sup\left\{|\lambda_j - \lambda_k|\colon\ \rho(j,k) \le \delta\right\}.$$

Sucesiones lentamente oscilantes:

$$\mathrm{SO} := \left\{\lambda \in \ell^\infty\colon\ \ \lim_{\delta\to 0^+} \omega_{\rho,\lambda} = 0\right\}.$$

En otras palabras, $\quad \mathrm{SO} = \left\{\lambda \in \ell^\infty\colon\ \ \lim_{\frac{j+1}{k+1}\to 1} \big|\lambda_j - \lambda_k\big| = 0\right\}.$

Ejemplos

Las sucesiones convergentes son lentamente oscilantes:

$$c \subset \mathrm{SO}\,.$$

Hay sucesiones que no son convergentes pero son lentamente oscilantes:

$$\Big(\cos\big(\ln(j+1)\big)\Big)_{j=0}^{\infty}.$$

La siguiente sucesión **no es** lentamente oscilante en el sentido indicado:

$$\Big(\cos\big(\pi\sqrt{n+1}\,\big)\Big)_{j=0}^{\infty}.$$