

Toeplitz operators with radial symbols on the Bergman space and slowly oscillating sequences

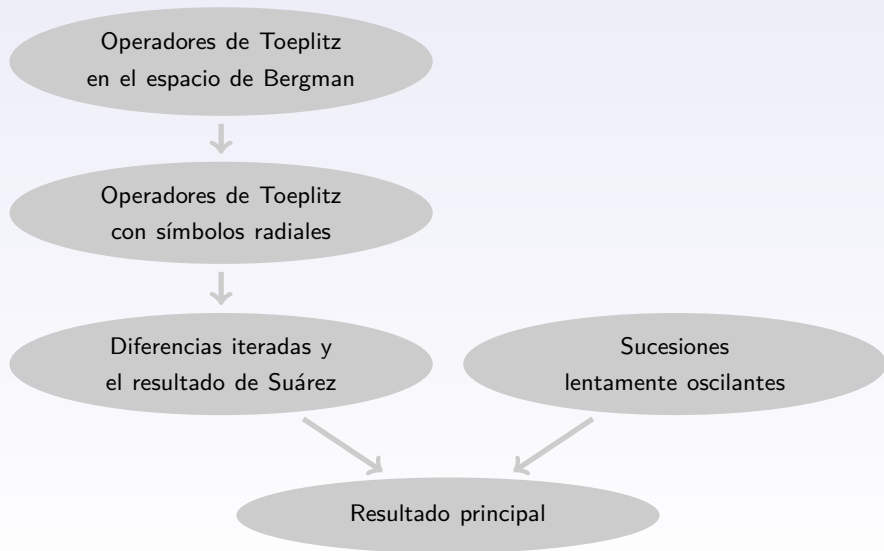
Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, Ciudad de México

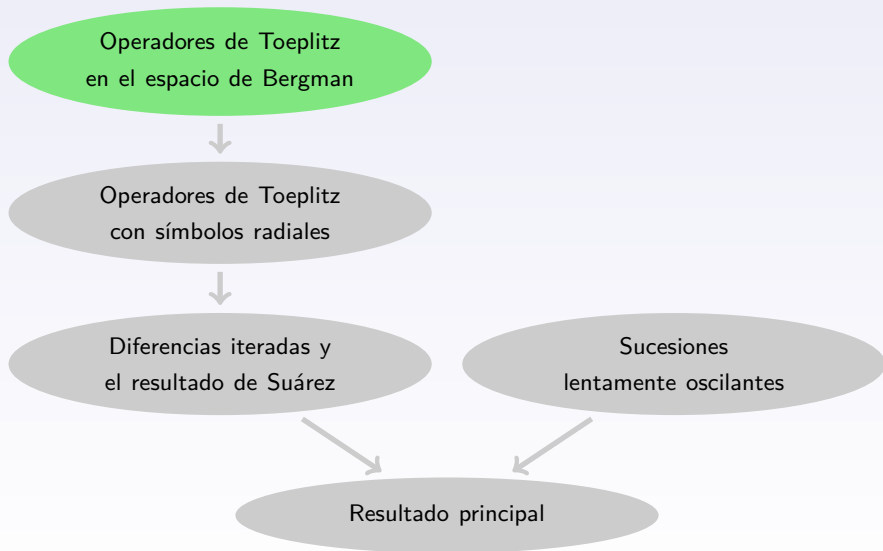
XLIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana
Tuxtla Gutiérrez (Chiapas, México)
del 1 al 5 de noviembre de 2010

Esta plática está basada en un trabajo
conjunto con
Nikolai Vasilevski y Sergey Grudsky.

Contenido



Contenido



Espacio de Bergman

$$\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\} .$$

μ := medida de Lebesgue en el plano.

$$A^2(\mathbf{D}) = \text{espacio de Bergman} := \{f \in L^2(\mathbf{D}, \mu) : f \text{ analítica}\} .$$

$A^2(\mathbf{D})$ es un subespacio (cerrado) de $L^2(\mathbf{D}, \mu)$.

Base del espacio de Bergman, proyección de Bergman

Los monomios normalizados forman una base ortonormal de $A^2(\mathbf{D})$:

$$\varphi_n(z) := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n.$$

Núcleo de Bergman:

$$K(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(w)} = \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}.$$

Proyección de Bergman :

$$(Bf)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n = \int_{\mathbf{D}} K(z, w) f(w) d\mu(w).$$

B es una proyección ortogonal de $L^2(\mathbf{D}, \mu)$ sobre $A^2(\mathbf{D})$:

$$B^2 = B, \quad B^* = B, \quad \text{Im}(B) = A^2(\mathbf{D}).$$

Isomorfía entre $A^2(\mathbf{D})$ y ℓ^2

$A^2(\mathbf{D})$ es un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita, por lo tanto, es isométricamente isomorfo a ℓ^2 , donde $\ell^2 :=$ el espacio de las sucesiones complejas de cuadrado sumable.

Isomorfía entre $A^2(\mathbf{D})$ y ℓ^2

$A^2(\mathbf{D})$ es un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita, por lo tanto, es isométricamente isomorfo a ℓ^2 , donde $\ell^2 :=$ el espacio de las sucesiones complejas de cuadrado sumable.

Construyamos un isomorfismo isométrico $R: A^2(\mathbf{D}) \rightarrow \ell^2$ usando la base $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ de $A^2(\mathbf{D})$:

$$R: \quad f \in A^2(\mathbf{D}) \quad \mapsto \quad (\langle f, \varphi_n \rangle)_{n=0}^{\infty} \in \ell^2.$$

$$R^{-1}: \quad (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^2 \quad \mapsto \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n \varphi_n \in A^2(\mathbf{D}).$$

Operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman

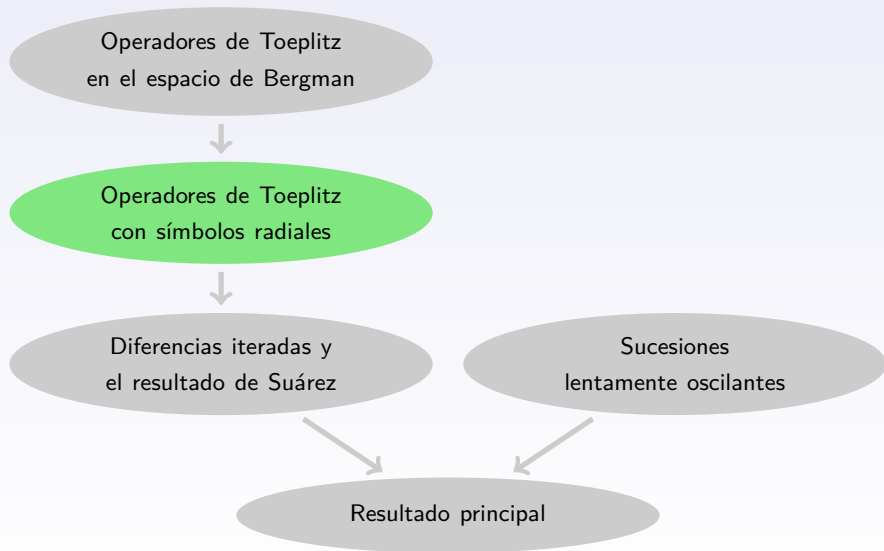
Dada una función $a \in L^\infty(\mathbf{D})$,
el operador de Toeplitz definido por el símbolo a es

$$T_a: A^2(\mathbf{D}) \rightarrow A^2(\mathbf{D}), \quad T_a f = B(af).$$

Representación integral de T_a :

$$(T_a f)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} \frac{a(w)f(w)}{(1 - z\bar{w})^2} d\mu(w).$$

Contenido



Funciones radiales

Una función $a: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ se llama **radial** si

$$a(z) = a(|z|) \quad \forall z \in \mathbf{D}.$$

Si $a: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ es una función radial,
la identificamos con su restricción al intervalo $[0, 1)$.

Funciones radiales

Una función $a: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ se llama **radial** si

$$a(z) = a(|z|) \quad \forall z \in \mathbf{D}.$$

Si $a: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ es una función radial,
la identificamos con su restricción al intervalo $[0, 1)$.

Ejemplo de una función radial

La función

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}, \quad z \mapsto |z|^2$$

es radial y se identifica con la función

$$[0, 1) \rightarrow \mathbf{C}, \quad r \mapsto r^2.$$

Diagonalización de operadores de Toeplitz con símbolos radiales

Dada una sucesión acotada $g = (g_n)_{n=0}^{\infty}$,
el operador de multiplicación por g en el espacio ℓ^2 es

$$M_g: \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad (x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (g_n x_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Diagonalización de operadores de Toeplitz con símbolos radiales

Dada una sucesión acotada $g = (g_n)_{n=0}^{\infty}$,
el operador de multiplicación por g en el espacio ℓ^2 es

$$M_g: \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad (x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (g_n x_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Teorema (Korenblum and Zhu, 1995)

Sea $a \in L^{\infty}(\mathbf{D})$ una función radial. Entonces

$$RT_a R^{-1} = M_{\gamma_a},$$

donde M_{γ_a} es el operador de multiplicación por la siguiente sucesión:

$$\gamma_a(n) = (n+1) \int_0^1 a(\sqrt{r}) r^n dr.$$

Demostración del teorema sobre la diagonalización

Calculemos coordenadas del vector $T_a\varphi_n$:

$$\begin{aligned}\langle T_a\varphi_n, \varphi_k \rangle &= \langle B(a\varphi_n), \varphi_k \rangle = \langle a\varphi_n, B(\varphi_k) \rangle = \langle a\varphi_n, \varphi_k \rangle \\ &= \frac{n+1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} a(z) z^n \bar{z}^k d\mu(z) \\ &= \frac{n+1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\varphi} d\varphi \int_0^1 a(r) r^{n+k+1} dr \\ &= \delta_{n,k} \cdot (n+1) \int_0^1 a(\sqrt{u}) u^n du \\ &= \delta_{n,k} \cdot \gamma_a(n).\end{aligned}$$

Demostración del teorema sobre la diagonalización

Calculemos coordenadas del vector $T_a\varphi_n$:

$$\begin{aligned}\langle T_a\varphi_n, \varphi_k \rangle &= \langle B(a\varphi_n), \varphi_k \rangle = \langle a\varphi_n, B(\varphi_k) \rangle = \langle a\varphi_n, \varphi_k \rangle \\ &= \frac{n+1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} a(z) z^n \bar{z}^k d\mu(z) \\ &= \frac{n+1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\varphi} d\varphi \int_0^1 a(r) r^{n+k+1} dr \\ &= \delta_{n,k} \cdot (n+1) \int_0^1 a(\sqrt{u}) u^n du \\ &= \delta_{n,k} \cdot \gamma_a(n).\end{aligned}$$

De allí $T_a\varphi_n = \gamma_a(n)\varphi_n$, esto es, T_a es *diagonal* en la base φ_n .

Pasando al espacio de coordenadas ℓ^2 , obtenemos que

$$RT_aR^{-1}x = \gamma_a x \quad \forall x \in \ell^2.$$

Álgebra generada por operadores de Toeplitz con símbolos radiales

$\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$:= el álgebra C^* de operadores acotados en $A^2(\mathbf{D})$.

Álgebra generada por operadores de Toeplitz con símbolos radiales

$\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$:= el álgebra C^* de operadores acotados en $A^2(\mathbf{D})$.

\mathcal{T}_{rad} := la subálgebra C^* de $\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$ generada por $\{T_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

Álgebra generada por operadores de Toeplitz con símbolos radiales

$\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$:= el álgebra C^* de operadores acotados en $A^2(\mathbf{D})$.

\mathcal{T}_{rad} := la subálgebra C^* de $\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$ generada por $\{T_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

\mathcal{A} := la subálgebra C^* de ℓ^∞ generada por $\{\gamma_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

Álgebra generada por operadores de Toeplitz con símbolos radiales

$\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$:= el álgebra C^* de operadores acotados en $A^2(\mathbf{D})$.

\mathcal{T}_{rad} := la subálgebra C^* de $\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$ generada por $\{T_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

\mathcal{A} := la subálgebra C^* de ℓ^∞ generada por $\{\gamma_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

Tenemos un isomorfismo isométrico entre los generadores de \mathcal{T}_{rad} y \mathcal{A} :

$$T_a \mapsto \gamma_a.$$

Álgebra generada por operadores de Toeplitz con símbolos radiales

$\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$:= el álgebra C^* de operadores acotados en $A^2(\mathbf{D})$.

\mathcal{T}_{rad} := la subálgebra C^* de $\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$ generada por $\{T_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

\mathcal{A} := la subálgebra C^* de ℓ^∞ generada por $\{\gamma_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

Tenemos un isomorfismo isométrico entre los generadores de \mathcal{T}_{rad} y \mathcal{A} :

$$T_a \mapsto \gamma_a.$$

Por lo tanto,

Las dos álgebras C^* , \mathcal{T}_{rad} y \mathcal{A} , son isométricamente isomorfas.

Álgebra generada por operadores de Toeplitz con símbolos radiales

$\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$:= el álgebra C^* de operadores acotados en $A^2(\mathbf{D})$.

\mathcal{T}_{rad} := la subálgebra C^* de $\mathcal{L}(A^2(\mathbf{D}))$ generada por $\{T_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

\mathcal{A} := la subálgebra C^* de ℓ^∞ generada por $\{\gamma_a : a \in L^\infty(0, 1)\}$.

Tenemos un isomorfismo isométrico entre los generadores de \mathcal{T}_{rad} y \mathcal{A} :

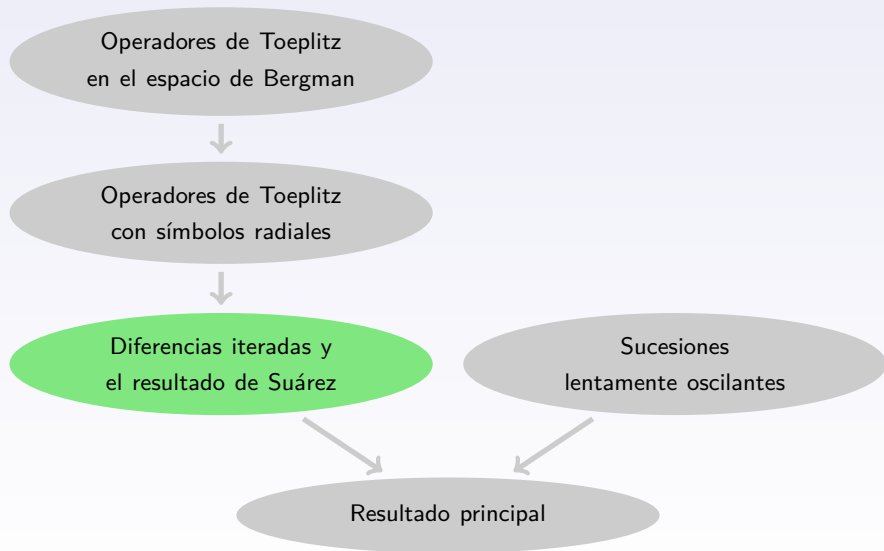
$$T_a \mapsto \gamma_a.$$

Por lo tanto,

Las dos álgebras C^* , \mathcal{T}_{rad} y \mathcal{A} , son isométricamente isomorfas.

El objetivo de este trabajo: describir \mathcal{A} de manera explícita.

Contenido



Diferencias iteradas de una sucesión

Dada una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, podemos definir sus diferencias del primer orden:

$$(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n,$$

diferencias del segundo orden:

$$(\Delta^2 x)_n = (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n,$$

etc.

Diferencias del k -ésimo orden:

$$(\Delta^k x)_n = (-1)^k \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} x_{n+j}.$$

Un resultado de la teoría de momentos

Dada una función $a: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$, los **momentos** de a son los números

$$\mu_a(n) := \int_0^1 a(t)t^n dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Un resultado de la teoría de momentos

Dada una función $a: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$, los **momentos** de a son los números

$$\mu_a(n) := \int_0^1 a(t)t^n dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Teorema (basado en resultados de Hausdorff)

Dada una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de momentos de una función acotada;
- las diferencias iteradas de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ cumplen con:

$$\sup_{k, n \geq 0} \left| (n+k+1) \binom{n+k}{k} (\Delta^k x)_n \right| < +\infty.$$

Descripción de sucesiones γ_a

Recordamos que

$$\gamma_a(n) = (n+1) \int_0^1 a(\sqrt{r}) r^n dr.$$

Observación (Suárez, 2008)

Dada una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- $x = \gamma_a$ para alguna $a \in L^{\infty}(0, 1)$;
- la sucesión $y_n = \frac{x_n}{n+1}$ es la sucesión de momentos de alguna función acotada;
- la sucesión $y_n = \frac{x_n}{n+1}$ cumple con la condición

$$\sup_{k, n \geq 0} \left| (n+k+1) \binom{n+k}{k} (\Delta^k y)_n \right| < +\infty.$$

Pero la última condición no es muy cómoda para checkarla.

Resultado de Suárez

Sea d_1 el conjunto de sucesiones acotadas $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ que cumplen con la condición

$$\sup_{n \geq 0} \left((n+1) |x_{n+1} - x_n| \right) < +\infty.$$

Notemos que $\gamma_a \in d_1$ para toda $a \in L^\infty(0, 1)$.

Resultado de Suárez

Sea d_1 el conjunto de sucesiones acotadas $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ que cumplen con la condición

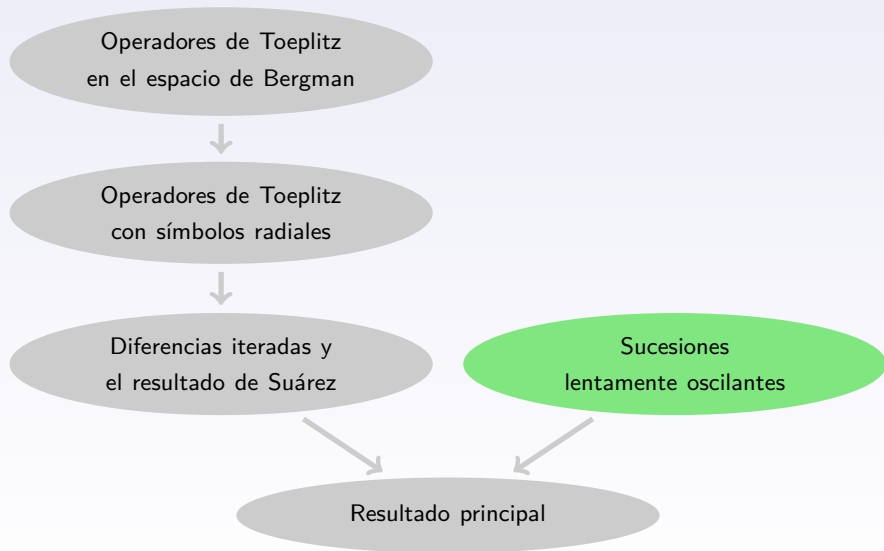
$$\sup_{n \geq 0} \left((n+1) |x_{n+1} - x_n| \right) < +\infty.$$

Notemos que $\gamma_a \in d_1$ para toda $a \in L^\infty(0, 1)$.

Teorema (Daniel Suárez, 2008)

\mathcal{A} es la cerradura en ℓ^∞ del conjunto d_1 .

Contenido



Espacio SO_1

SO_1 := el espacio de sucesiones acotadas $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ tales que

$$\lim_{\frac{m}{n} \rightarrow 1} |x_m - x_n| = 0,$$

esto es,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall m, n \quad \left(\left| \frac{m}{n} - 1 \right| < \delta \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon \right).$$

Es fácil ver que SO_1 es una subálgebra cerrada de ℓ^∞ .

Ejemplos de sucesiones en SO_1

Sucesiones que tienen límite finito

$$c \subsetneq SO_1$$

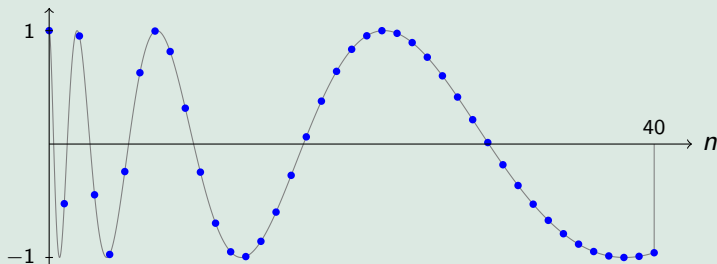
Ejemplos de sucesiones en SO_1

Sucesiones que tienen límite finito

$$c \subsetneq SO_1$$

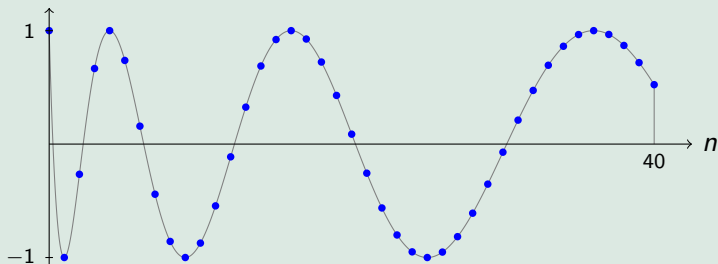
Ejemplo de una sucesión no convergente que pertenece a SO_1

$$x_n = \cos\left(6 \log(n+1)\right)$$



Ejemplo de una sucesión $\notin SO_1$

$$x_n = \cos(\pi\sqrt{n})$$



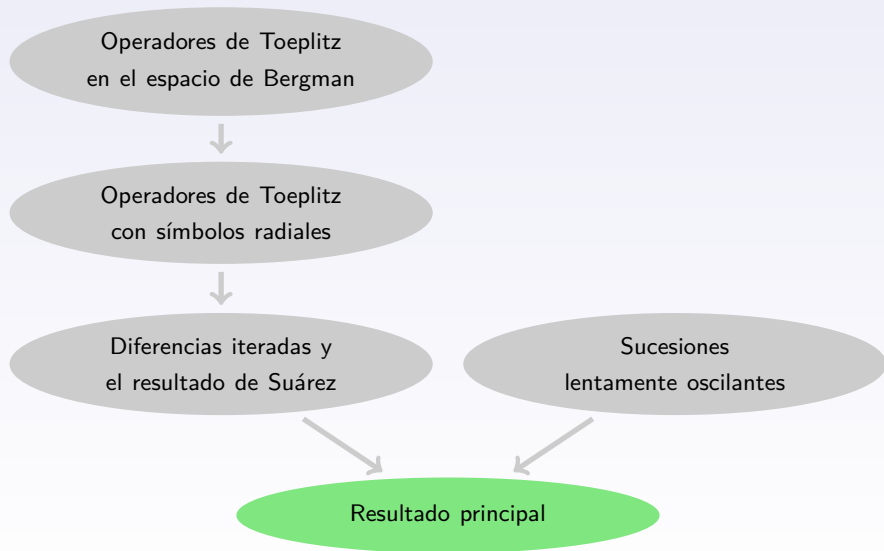
Esta sucesión satisface la condición:

$$|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty,$$

pero no pertenece a SO_1 :

$$|x_m - x_n| \not\rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \frac{m}{n} \rightarrow 1.$$

Contenido



Resultado principal

Teorema

$$\mathcal{A} = \text{SO}_1.$$

Por consecuencia,

$$\mathcal{T}_{\text{rad}} \cong \text{SO}_1.$$

Idea de la demostración

El resultado de Suárez dice que d_1 es un subconjunto denso de \mathcal{A} .

Nosotros demostramos que d_1 es un subconjunto denso de SO_1 .