

# Matrices de Toeplitz tetradiagonales generadas por la función

$$a(t) = t^{-1} + t^2.$$

## Parte 1: la ecuación característica

Expositor: Egor Maximenko

Coautores: Sergei Grudsky, Román Higuera García, Fidel Rojas Vásquez

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Seminario “Matrices de Toeplitz”, 4 de noviembre de 2022

- 1 Introducción
- 2 Simetría bajo rotación  $2\pi/3$
- 3 El origen
- 4 Cambio de variable
- 5 Ecuación característica

# Plan

- 1 Introducción
- 2 Simetría bajo rotación  $2\pi/3$
- 3 El origen
- 4 Cambio de variable
- 5 Ecuación característica

# Objetos de estudio:

## matrices de Toeplitz tetradiagonales con diagonales 1, 0, 0, 1

$$a(t) = t^{-1} + t^2 \quad (t \in \mathbb{T}).$$

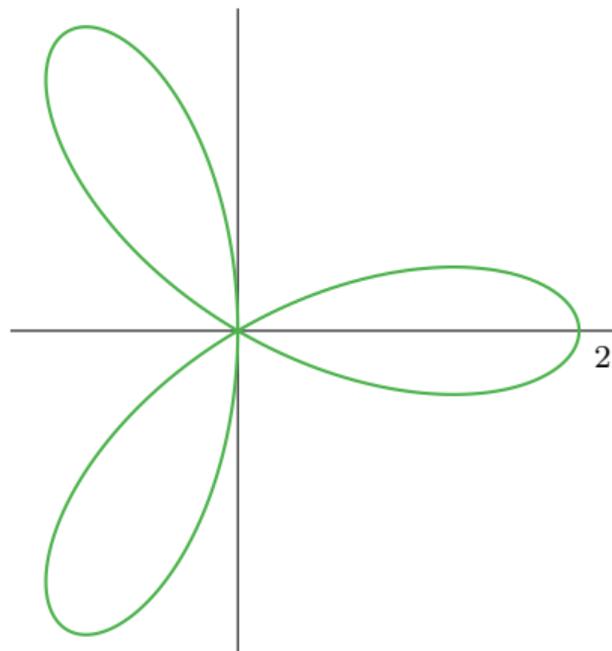
Coeficientes de Fourier de  $a$ :

$$a_{-1} = 1, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

Consideramos las matrices de Toeplitz:  $T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n$ .

$$T_6(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

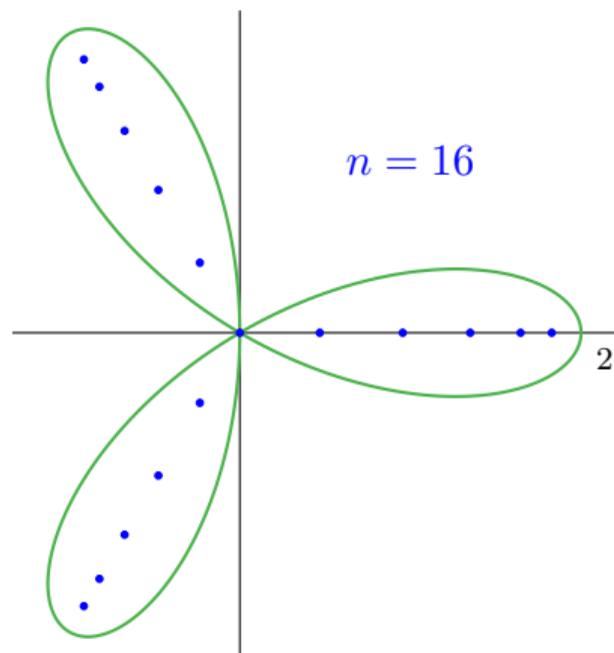
# Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios



La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

# Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

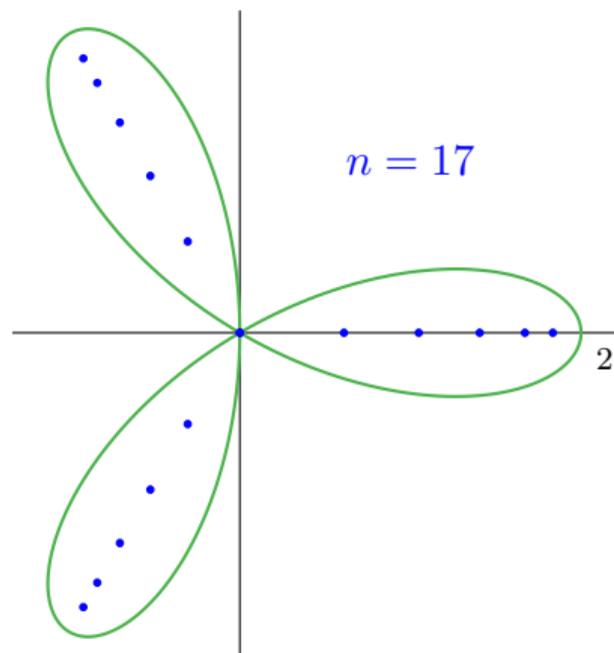


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de  $T_n(a)$ ,  
calculados con algoritmos generales  
del sistema Sagemath.

# Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

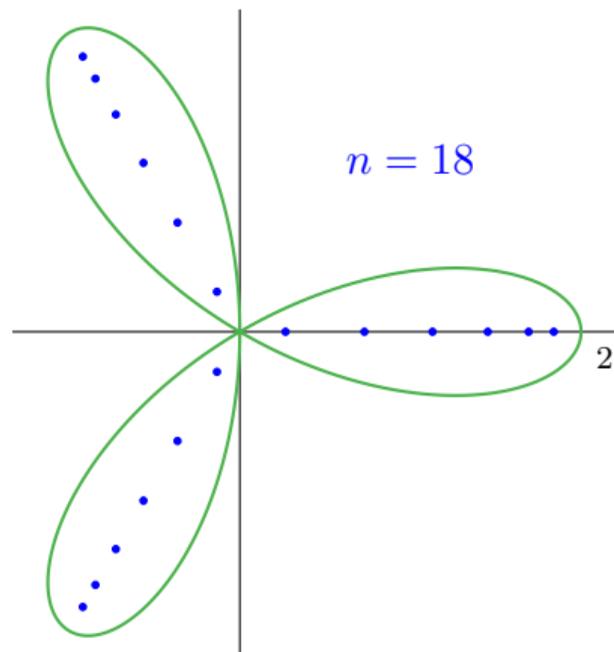


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de  $T_n(a)$ ,  
calculados con algoritmos generales  
del sistema Sagemath.

# Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

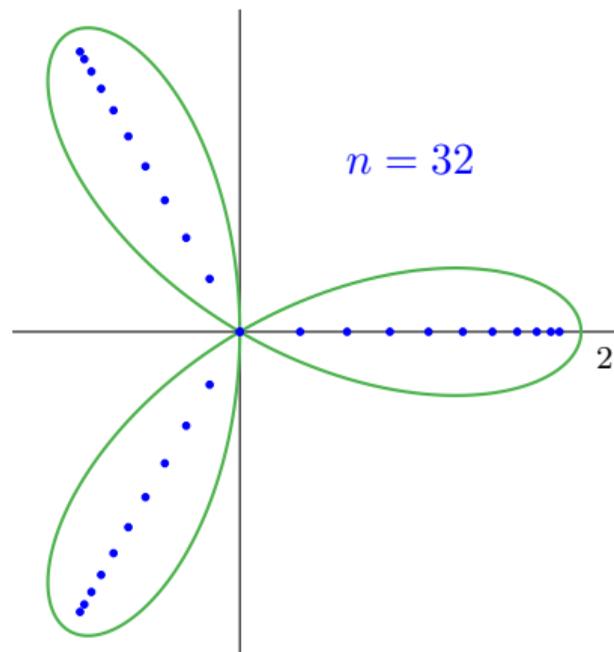


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de  $T_n(a)$ ,  
calculados con algoritmos generales  
del sistema Sagemath.

# Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

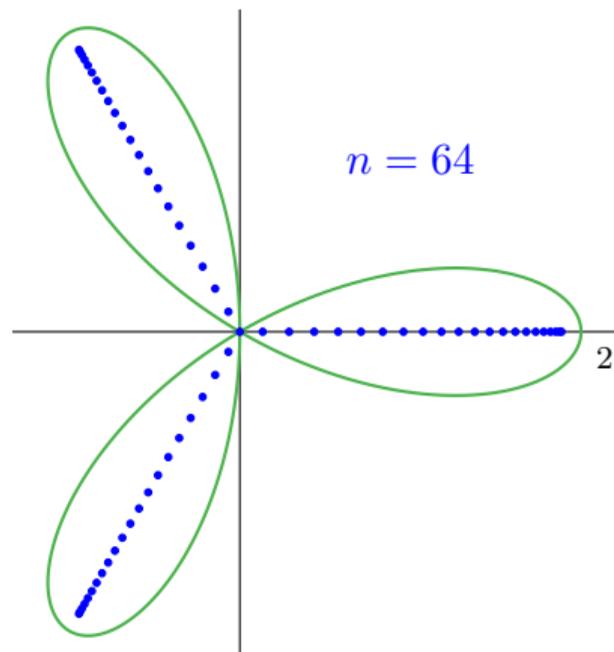


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de  $T_n(a)$ ,  
calculados con algoritmos generales  
del sistema Sagemath.

# Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

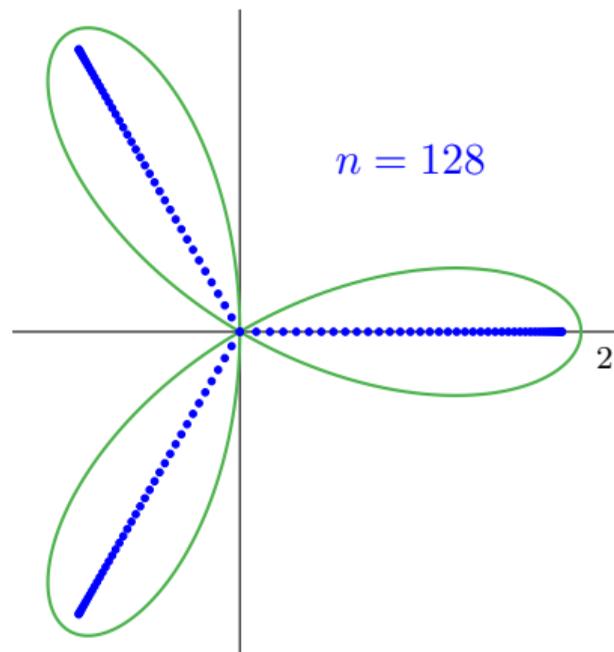


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de  $T_n(a)$ ,  
calculados con algoritmos generales  
del sistema Sagemath.

# Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

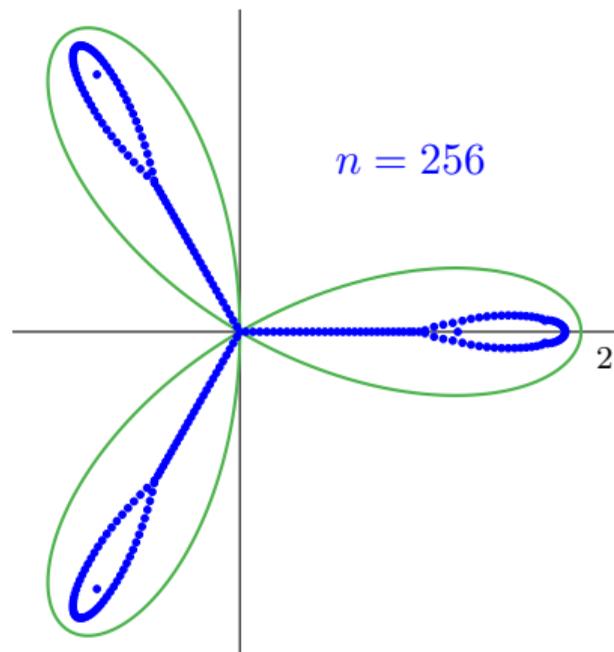


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de  $T_n(a)$ ,  
calculados con algoritmos generales  
del sistema Sagemath.

# Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios



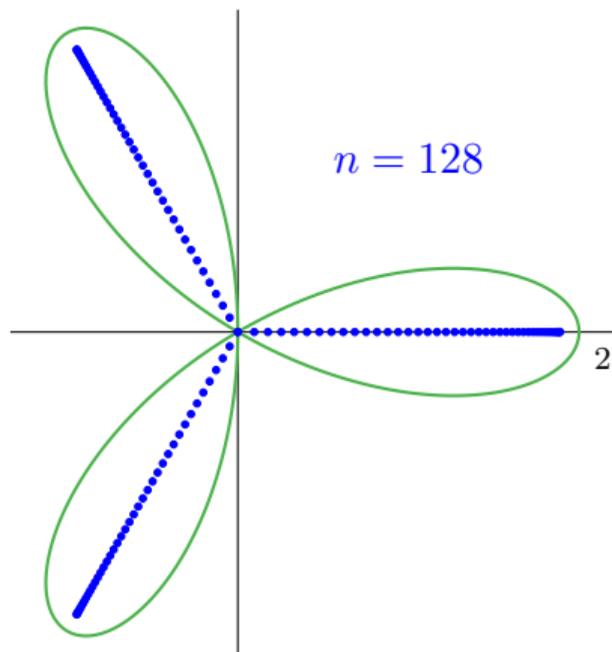
La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de  $T_n(a)$ ,  
calculados con algoritmos generales  
del sistema Sagemath.

Para  $n$  grandes, estos algoritmos generales  
no dan la respuesta correcta.

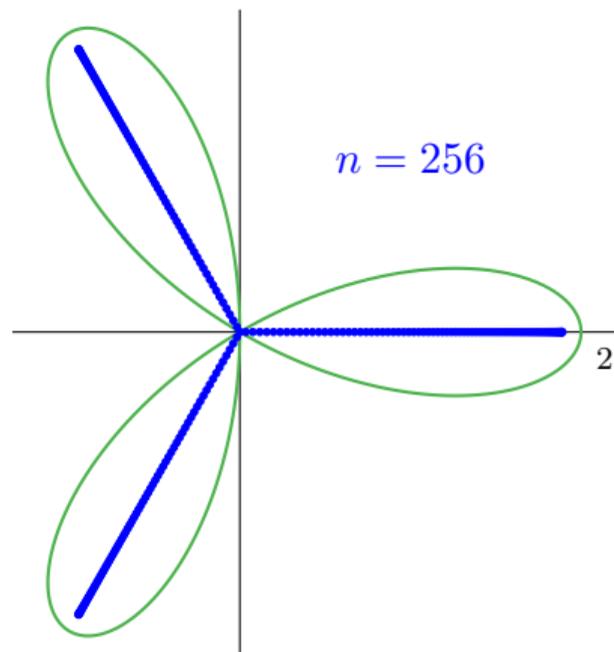
# Dibujos: los valores propios verdaderos



La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

# Dibujo: los valores propios verdaderos



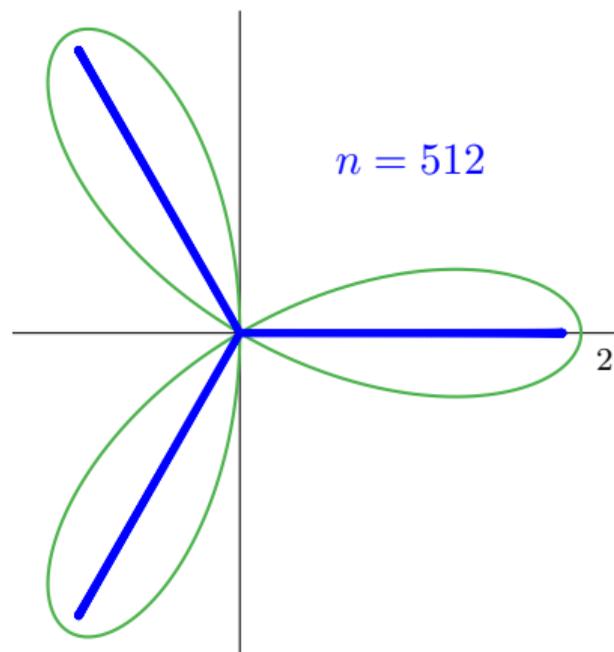
La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios verdaderos de  $T_n(a)$ .

Transformamos la ecuación característica en forma trigonométrica y la resolvemos con métodos numéricos (más adelante).

# Dibujo: los valores propios verdaderos



La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios verdaderos de  $T_n(a)$ .

Transformamos la ecuación característica en forma trigonométrica y la resolvemos con métodos numéricos (más adelante).

# Historia de nuestro estudio

Sergei Grudsky propuso este problema en el año 2013 o antes.

En el año 2013 empezamos a trabajar sobre este tema juntos con Román Higuera García y Fidel Vásquez Rojas.

Hicimos cambios de variable en la ecuación característica.

Demostramos la localización de los valores propios.

Román Higuera García y Fidel Vásquez Rojas expusieron estos resultados en el Congreso Nacional de la SMM en 2013.

Durante el año 2014 buscábamos fórmulas asintóticas para los valores propios.

Regresamos al proyecto varias veces en 2014–2021, pero no hemos podido terminar.

# Polinomios de Laurent y matrices de Toeplitz de banda

$$b(t) = \sum_{k=-r}^s b_k t^k, \quad r, s \geq 1, \quad b_{-r} \neq 0, \quad b_s \neq 0.$$

# Polinomios de Laurent y matrices de Toeplitz de banda

$$b(t) = \sum_{k=-r}^s b_k t^k, \quad r, s \geq 1, \quad b_{-r} \neq 0, \quad b_s \neq 0.$$

Se puede descomponer en factores de grado 1:

$$b(t) = b_s t^{-r} \prod_{k=1}^{r+s} (t - z_k).$$

# Polinomios de Laurent y matrices de Toeplitz de banda

$$b(t) = \sum_{k=-r}^s b_k t^k, \quad r, s \geq 1, \quad b_{-r} \neq 0, \quad b_s \neq 0.$$

Se puede descomponer en factores de grado 1:

$$b(t) = b_s t^{-r} \prod_{k=1}^{r+s} (t - z_k).$$

Denotamos por  $T_n(b)$  a la matriz de Toeplitz de orden  $n$ :

$$T_n(b) = \left[ b_{j-k} \right]_{j,k=1}^n.$$

# Fórmula de Widom para los determinantes de Toeplitz de banda

$$\det T_n(b) = \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ \#M=s}} C_M w_M^n,$$

$$w_M := b_s (-1)^s \prod_{j \in M} z_j, \quad C_M := \prod_{j \in M} z_j^r \prod_{k \in \{1, \dots, r+s\} \setminus M} \frac{1}{z_j - z_k}.$$

# Fórmula de Widom para los determinantes de Toeplitz de banda

$$\det T_n(b) = \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ \#M=s}} C_M w_M^n,$$

$$w_M := b_s (-1)^s \prod_{j \in M} z_j, \quad C_M := \prod_{j \in M} z_j^r \prod_{k \in \{1, \dots, r+s\} \setminus M} \frac{1}{z_j - z_k}.$$



Harold Widom (1958):

On the eigenvalues of certain hermitian operators.

# Fórmula de Widom para los determinantes de Toeplitz de banda

$$\det T_n(b) = \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ \#M=s}} C_M w_M^n,$$

$$w_M := b_s (-1)^s \prod_{j \in M} z_j, \quad C_M := \prod_{j \in M} z_j^r \prod_{k \in \{1, \dots, r+s\} \setminus M} \frac{1}{z_j - z_k}.$$



Harold Widom (1958):

On the eigenvalues of certain hermitian operators.

Esta fórmula se puede deducir de la teoría de polinomios de Schur.

# El conjunto límite de la sucesión de los espectros

Para cada  $\lambda$  en  $\mathbb{C}$ , ordenamos los ceros de  $b - \lambda$  de tal manera que

$$|z_1(\lambda)| \leq |z_2(\lambda)| \leq \cdots \leq |z_{r+s}(\lambda)|.$$

Schmidt y Spitzer demostraron que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sp}(T_n(b)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sp}(T_n(b)) = \Lambda(b),$$

donde

$$\Lambda(b) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |z_r(\lambda)| = |z_{r+1}(\lambda)| \right\}.$$

De manera equivalente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\text{Hausdorff}} \left( \operatorname{sp}(T_n(b)), \Lambda(b) \right) = 0.$$

# El conjunto límite de la sucesión de los espectros, bibliografía

 [Palle Schmidt, Frank Spitzer \(1960\):](#)  
The Toeplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial.

El capítulo 11 del siguiente libro contiene una explicación detallada.

 [Albrecht Böttcher, Sergei M. Grudsky \(2005\):](#)  
Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices.

El siguiente artículo contiene una receta simplificada para calcular  $\Lambda(a)$  y una clasificación de los puntos de  $\Lambda(a)$ .

 [A. Böttcher, S.M. Grudsky, Juanita Gasca, Anatoli V. Kozak \(2021\):](#)  
Eigenvalue clusters of large tetradiagonal Toeplitz matrices.

# El polinomio característico en nuestro ejemplo

$$a(t) = t^2 + t^{-1}, \quad r = 1, \quad s = 2.$$

# El polinomio característico en nuestro ejemplo

$$a(t) = t^2 + t^{-1}, \quad r = 1, \quad s = 2.$$

Dado  $\lambda$  en  $\mathbb{C}$ , denotamos por  $z_1(\lambda)$ ,  $z_2(\lambda)$ ,  $z_3(\lambda)$  a los ceros de  $a - \lambda$ :

$$\begin{aligned} a(t) - \lambda &= t^2 - \lambda + t^{-1} = t^{-1}(t^3 - \lambda t + 1) \\ &= t^{-1}(t - z_1(\lambda))(t - z_2(\lambda))(t - z_3(\lambda)). \end{aligned}$$

# El polinomio característico en nuestro ejemplo

$$a(t) = t^2 + t^{-1}, \quad r = 1, \quad s = 2.$$

Dado  $\lambda$  en  $\mathbb{C}$ , denotamos por  $z_1(\lambda)$ ,  $z_2(\lambda)$ ,  $z_3(\lambda)$  a los ceros de  $a - \lambda$ :

$$\begin{aligned} a(t) - \lambda &= t^2 - \lambda + t^{-1} = t^{-1}(t^3 - \lambda t + 1) \\ &= t^{-1}(t - z_1(\lambda))(t - z_2(\lambda))(t - z_3(\lambda)). \end{aligned}$$

Entonces

$$\det(T_n(a - \lambda)) = \frac{z_1^{n+1} z_2^{n+1}}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} + \frac{z_1^{n+1} z_3^{n+1}}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_2)} + \frac{z_2^{n+1} z_3^{n+1}}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}.$$

# Los vectores propios en nuestro ejemplo

Si  $\lambda$  es un valor propio de  $T_n(a)$ , entonces  $T_n(a)v = \lambda I_n$ , donde  $v = (v_r)_{r=1}^n$ ,

$$v_r = (z_2^{n+1} - z_3^{n+1})z_1^{n+1-r} + (z_3^{n+1} - z_1^{n+1})z_2^{n+1-r} + (z_1^{n+1} - z_2^{n+1})z_3^{n+1-r}.$$



William F. Trench (1985):

On the eigenvalue problem for Toeplitz band matrices.

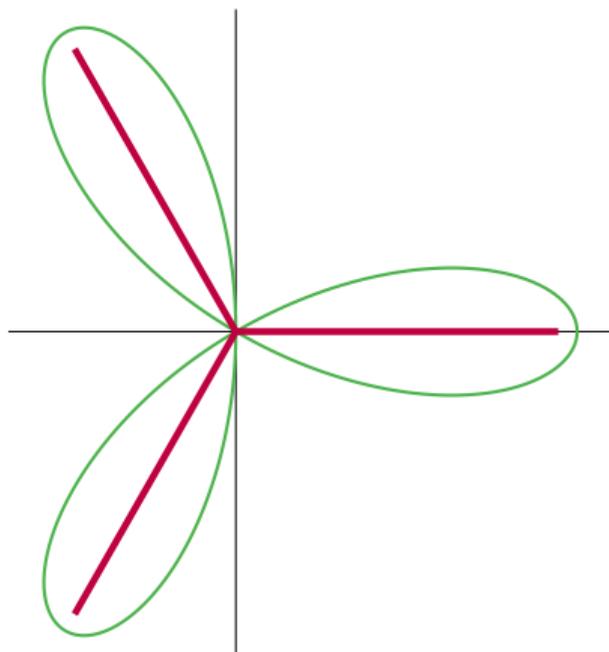


Egor A. Maximenko, Mario Alberto Moctezuma-Salazar (2017):

Cofactors and eigenvectors of banded Toeplitz matrices:

Trench formulas via skew Schur polynomials.

# El conjunto de Schmidt y Spitzer para nuestro ejemplo



$\Lambda(a)$  es la unión de tres segmentos:

$$\Lambda(a) = \bigcup_{k=0}^2 \varepsilon_3^k [0, L],$$

donde

$$\varepsilon_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad L = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

## Razonamientos y resultados que mostraremos en esta plática

- La simetría del espectro bajo la rotación  $2\pi/3$ .
- El origen como valor propio para  $n \notin 3\mathbb{N}$ .
- El cambio de variable trigonométrico.
- La ecuación característica en forma trigonométrica.

# Plan

- 1 Introducción
- 2 Simetría bajo rotación  $2\pi/3$**
- 3 El origen
- 4 Cambio de variable
- 5 Ecuación característica

Proposición de Schmidt y Spitzer sobre  $T_n(b_\rho)$  con  $b_\rho(t) = b(\rho t)$ 

## Proposición

Sea  $b$  un polinomio de Laurent y sea  $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Definimos

$$b_\rho(t) := b(\rho t).$$

Entonces

$$T_n(b_\rho) = \text{diag}(\rho, \rho^2, \dots, \rho^n) T_n(b) \text{diag}(\rho^{-1}, \rho^{-2}, \dots, \rho^{-n}).$$

Por lo tanto,

$$\text{sp}(T_n(b_\rho)) = \text{sp}(T_n(b)).$$

# Proposición de Schmidt y Spitzer: ejemplo

$$\text{diag}(\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4) T_4(b) \text{diag}(\rho^{-1}, \rho^{-2}, \rho^{-3}, \rho^{-4})$$

$$= \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & b_{-3} \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_0 & \rho^{-1}b_{-1} & \rho^{-2}b_{-2} & \rho^{-3}b_{-3} \\ \rho^1b_1 & b_0 & \rho^{-1}b_{-1} & \rho^{-2}b_{-2} \\ \rho^2b_2 & \rho^1b_1 & b_0 & \rho^{-1}b_{-1} \\ \rho^3b_3 & \rho^2b_2 & \rho^1b_1 & b_0 \end{bmatrix} = T_4(b_\rho).$$

# Simetría del espectro de $T_n(a)$

$$\varepsilon_3 := e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

## Proposición

El espectro de  $T_n(a)$  es invariante bajo  $\frac{2\pi}{3}$ -rotaciones alrededor del origen:

si  $\lambda \in \text{sp}(T_n(a))$ , entonces  $\varepsilon_3\lambda \in \text{sp}(T_n(a))$ .

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a))$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a)) =$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a)) = \varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a)) = \varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3})) =$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a)) = \varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(\varepsilon_3 T_n(a_{\varepsilon_3}))$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a)) = \varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(\varepsilon_3 T_n(a_{\varepsilon_3})) =$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a)) = \varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(\varepsilon_3 T_n(a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(T_n(\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}))$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a)) = \varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(\varepsilon_3 T_n(a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(T_n(\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3})) =$$

# Demostración

Nuestro símbolo generador  $a(t) = t^{-1} + t^2$  tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3}(t) = \varepsilon_3 a(\varepsilon_3 t) = \varepsilon_3 \left( \varepsilon_3^{-1} t^{-1} + \varepsilon_3^2 t^2 \right) = t^{-1} + t^2 = a(t).$$

Además, por la proposición de Schmidt y Spitzer,  $\text{sp}(T_n(a)) = \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3}))$ .

Aplicamos estas propiedades y el teorema del mapeo del espectro:

$$\varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a)) = \varepsilon_3 \text{sp}(T_n(a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(\varepsilon_3 T_n(a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(T_n(\varepsilon_3 a_{\varepsilon_3})) = \text{sp}(T_n(a)).$$

# Plan

- 1 Introducción
- 2 Simetría bajo rotación  $2\pi/3$
- 3 El origen**
- 4 Cambio de variable
- 5 Ecuación característica

# ¿Es $\lambda = 0$ un valor propio de $T_n(a)$ ?

## Proposición

Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Escribimos  $n$  en la forma  $n = 3m + r$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \{0, 1, 2\}$ .

- Si  $r = 0$ , entonces 0 no es valor propio de  $T_n(a)$ .
- Si  $r = 1$ , entonces 0 es un valor propio de  $T_n(a)$  de multiplicidad al menos 1.
- Si  $r = 2$ , entonces 0 es un valor propio de  $T_n(a)$  de mult. algebraica al menos 2.

En realidad,  $r$  es exactamente la multiplicidad algebraica del valor propio 0, pero será más cómodo demostrar este hecho después.

# Demostración

Para  $\lambda = 0$ , encontramos los ceros de la función  $a - \lambda$ :

$$z^2 + \frac{1}{z} = 0 \quad \iff \quad z^3 = -1 \quad \iff \quad z \in \left\{ -1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}} \right\}.$$

# Demostración

Para  $\lambda = 0$ , encontramos los ceros de la función  $a - \lambda$ :

$$z^2 + \frac{1}{z} = 0 \quad \iff \quad z^3 = -1 \quad \iff \quad z \in \left\{ -1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}} \right\}.$$

Con la fórmula de Widom, es fácil ver que

$$\det(T_n(a)) = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{2r\pi}{3} \right).$$

# Demostración

Para  $\lambda = 0$ , encontramos los ceros de la función  $a - \lambda$ :

$$z^2 + \frac{1}{z} = 0 \quad \iff \quad z^3 = -1 \quad \iff \quad z \in \left\{ -1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}} \right\}.$$

Con la fórmula de Widom, es fácil ver que

$$\det(T_n(a)) = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{2r\pi}{3} \right).$$

Si  $r = 0$ , entonces  $\det(T_n(a)) \neq 0$ .

# Demostración

Para  $\lambda = 0$ , encontramos los ceros de la función  $a - \lambda$ :

$$z^2 + \frac{1}{z} = 0 \quad \iff \quad z^3 = -1 \quad \iff \quad z \in \left\{ -1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}} \right\}.$$

Con la fórmula de Widom, es fácil ver que

$$\det(T_n(a)) = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{2r\pi}{3} \right).$$

Si  $r = 0$ , entonces  $\det(T_n(a)) \neq 0$ .

Si  $r = 1$  o  $r = 2$ , entonces  $\det(T_n(a)) = 0$ .

# $n = 3m + 1$ , el vector propio asociado al valor propio 0

Supongamos que  $r = 1$ , esto es,  $n = 3m + 1$ .

$n = 3m + 1$ , el vector propio asociado al valor propio 0

Supongamos que  $r = 1$ , esto es,  $n = 3m + 1$ .

Definimos  $v \in \mathbb{C}^n$ ,

$$v := (1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, (-1)^m).$$

$n = 3m + 1$ , el vector propio asociado al valor propio 0

Supongamos que  $r = 1$ , esto es,  $n = 3m + 1$ .

Definimos  $v \in \mathbb{C}^n$ ,

$$v := (1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, (-1)^m).$$

Entonces  $T_n(a)v = 0_n$ , esto es,  $v$  es un vector propio asociado al valor propio 0.

Ejemplo:  $T_{10}(a)v = 0_{10}$ 

$$T_{10}(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sumamos las columnas sombreadas multiplicadas por  $1, -1, 1, -1$ .

# $n = 3m + 2$ , el vector propio asociado al valor propio 0

Supongamos que  $r = 2$ , esto es,  $n = 3m + 2$ .

$n = 3m + 2$ , el vector propio asociado al valor propio 0

Supongamos que  $r = 2$ , esto es,  $n = 3m + 2$ .

Definimos  $v, w \in \mathbb{C}^n$ ,

$$v := (1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, 0, (-1)^m, 0),$$

$n = 3m + 2$ , el vector propio asociado al valor propio 0

Supongamos que  $r = 2$ , esto es,  $n = 3m + 2$ .

Definimos  $v, w \in \mathbb{C}^n$ ,

$$v := (1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, 0, (-1)^m, 0),$$

$$w := (0, 1, 0, 0, -2, 0, 0, 3, 0, 0, -4, 0, 0, \dots, (m+1)(-1)^m).$$

$n = 3m + 2$ , el vector propio asociado al valor propio 0

Supongamos que  $r = 2$ , esto es,  $n = 3m + 2$ .

Definimos  $v, w \in \mathbb{C}^n$ ,

$$v := (1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, 0, (-1)^m, 0),$$

$$w := (0, 1, 0, 0, -2, 0, 0, 3, 0, 0, -4, 0, 0, \dots, (m+1)(-1)^m).$$

Entonces

$$T_n(a)v = 0_n, \quad T_n(a)w = v.$$

$n = 3m + 2$ , el vector propio asociado al valor propio 0

Supongamos que  $r = 2$ , esto es,  $n = 3m + 2$ .

Definimos  $v, w \in \mathbb{C}^n$ ,

$$v := (1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, 0, (-1)^m, 0),$$

$$w := (0, 1, 0, 0, -2, 0, 0, 3, 0, 0, -4, 0, 0, \dots, (m+1)(-1)^m).$$

Entonces

$$T_n(a)v = 0_n, \quad T_n(a)w = v.$$

Esto significa que  $v$  es un vector propio y  $w$  es un vector propio generalizado.

# Plan

- 1 Introducción
- 2 Simetría bajo rotación  $2\pi/3$
- 3 El origen
- 4 Cambio de variable
- 5 Ecuación característica

# Las soluciones de la ecuación $a(z) = \lambda$

## Proposición

Sea  $\lambda \in (0, L)$ , donde  $L = 3/\sqrt[3]{4} \approx 1.89$ .

Entonces los ceros del polinomio  $P(z) := z^3 - \lambda z + 1$  se pueden escribir como

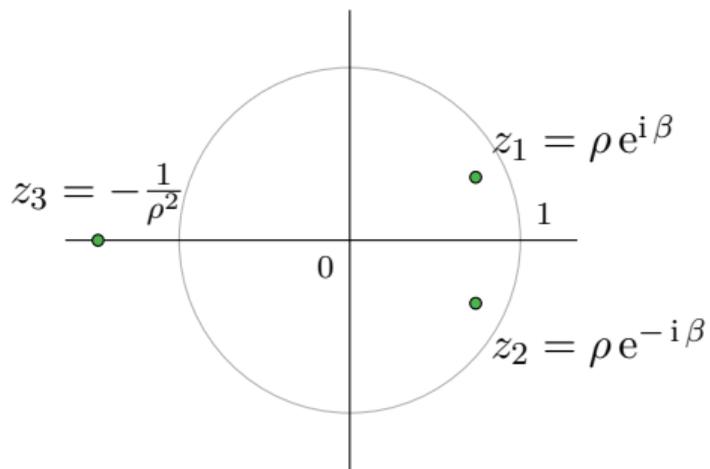
$$z_1 = \rho e^{i\beta}, \quad z_2 = \rho e^{-i\beta}, \quad z_3 = -\frac{1}{\rho^2},$$

donde  $\beta \in (0, \pi/3)$ ,

$$\lambda = L \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta\right) (\cos \beta)^{4/3}, \quad \rho = \left(\frac{1}{2 \cos \beta}\right)^{1/3}.$$

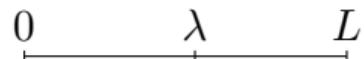
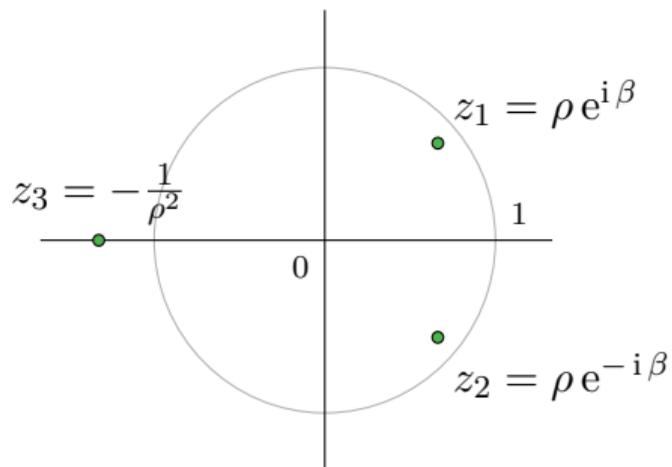
Además,  $\frac{1}{2} < \rho < 1$  y  $|z_1| = |z_2| < |z_3|$ .

# Los números $z_1, z_2, z_3$ y su dependencia de $\lambda$



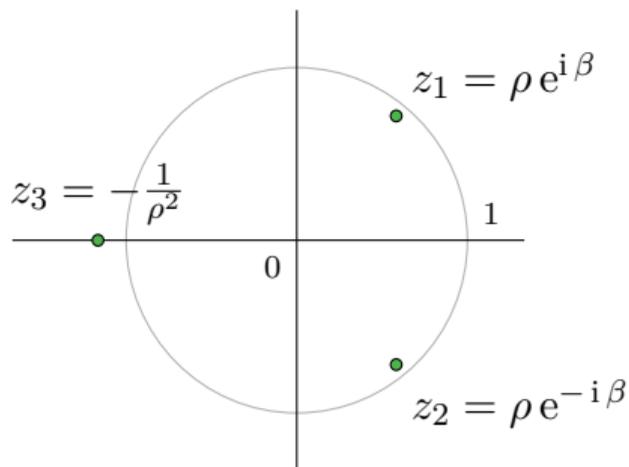
$$\lambda = L \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}, \quad \rho = \left( \frac{1}{2 \cos \beta} \right)^{1/3}.$$

# Los números $z_1, z_2, z_3$ y su dependencia de $\lambda$



$$\lambda = L \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}, \quad \rho = \left( \frac{1}{2 \cos \beta} \right)^{1/3}.$$

# Los números $z_1, z_2, z_3$ y su dependencia de $\lambda$



$$\lambda = L \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}, \quad \rho = \left( \frac{1}{2 \cos \beta} \right)^{1/3}.$$

# Demostración: $P$ tiene solamente un cero real

$$P(x) := x^3 - \lambda x + 1, \quad P'(x) = 3x^2 - \lambda.$$

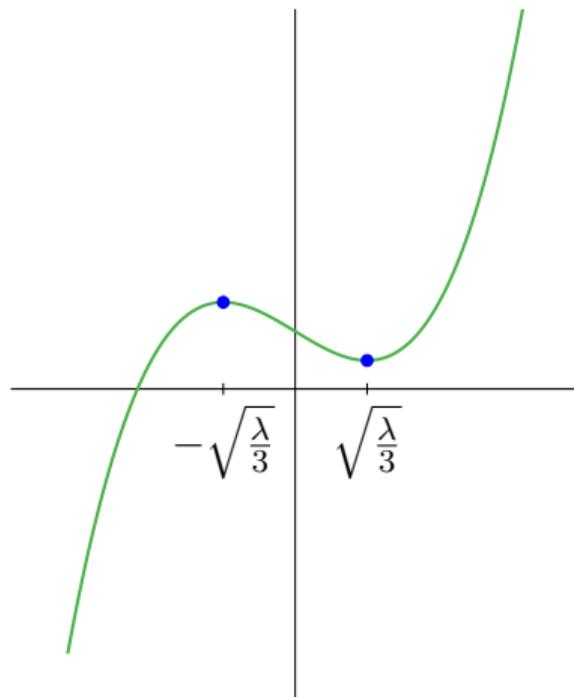
$P$  tiene un mínimo local en  $\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$ .

$$P\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right) = 1 - 2\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{3/2} > 0,$$

debido a la suposición que  $\lambda \in (0, L)$ .

Por eso  $P$  tiene solamente una raíz real.

Esta raíz real está en  $(-\infty, -\sqrt{\lambda/3})$ .



# Demostración: introducimos $\beta$ y $\rho$

El polinomio  $P(z) = z^3 - \lambda z + 1$  tiene:

- una raíz real negativa, la denotamos por  $z_3$ ,
- dos raíces complejas mutuamente conjugadas, las denotamos por  $z_1$  y  $z_2$ .

## Demostración: introducimos $\beta$ y $\rho$

El polinomio  $P(z) = z^3 - \lambda z + 1$  tiene:

- una raíz real negativa, la denotamos por  $z_3$ ,
- dos raíces complejas mutuamente conjugadas, las denotamos por  $z_1$  y  $z_2$ .

Numeramos las raíces de tal manera que  $\arg(z_1) > 0$ .

## Demostración: introducimos $\beta$ y $\rho$

El polinomio  $P(z) = z^3 - \lambda z + 1$  tiene:

- una raíz real negativa, la denotamos por  $z_3$ ,
- dos raíces complejas mutuamente conjugadas, las denotamos por  $z_1$  y  $z_2$ .

Numeramos las raíces de tal manera que  $\arg(z_1) > 0$ .

Pongamos

$$\beta := \arg(z_1), \quad \rho := |z_1|.$$

## Demostración: introducimos $\beta$ y $\rho$

El polinomio  $P(z) = z^3 - \lambda z + 1$  tiene:

- una raíz real negativa, la denotamos por  $z_3$ ,
- dos raíces complejas mutuamente conjugadas, las denotamos por  $z_1$  y  $z_2$ .

Numeramos las raíces de tal manera que  $\arg(z_1) > 0$ .

Pongamos

$$\beta := \arg(z_1), \quad \rho := |z_1|.$$

Entonces

$$z_1 = \rho e^{i\beta}, \quad z_2 = \rho e^{-i\beta}.$$

# Demostración: usamos las fórmulas de Vieta

Los ceros del polinomio  $P(z) = z^3 - \lambda z + 1 = 0$  satisfacen las fórmulas de Vieta:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$

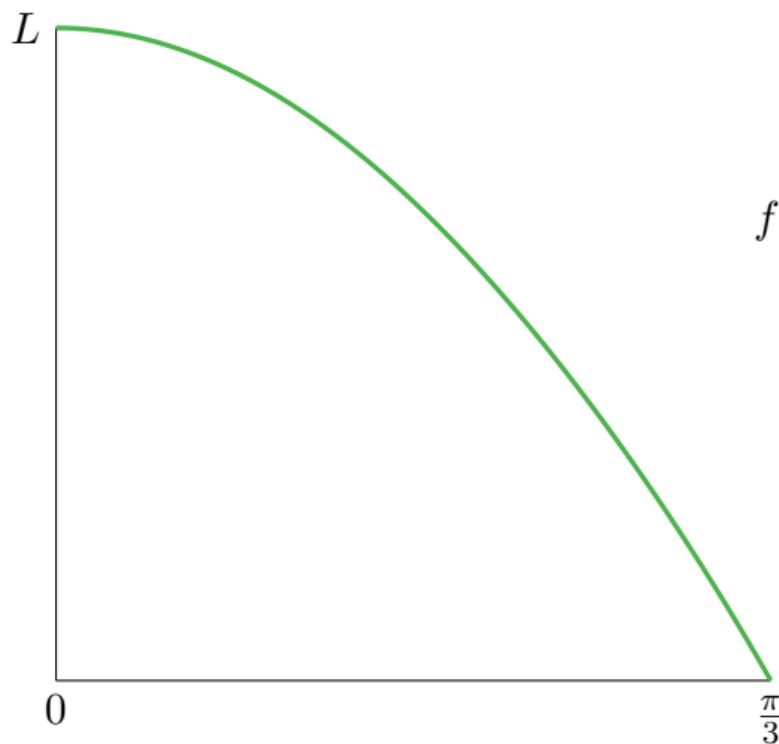
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -\lambda,$$

$$z_1 z_2 z_3 = -1.$$

Sustituimos  $z_1 = \rho e^{i\beta}$  y  $z_2 = \rho e^{-i\beta}$ . Obtenemos

$$z_3 = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \rho^3 = \frac{1}{2 \cos \beta},$$

$$\lambda = -\rho^2(1 - 4 \cos^2 \beta) = L \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}.$$

Dependencia  $\beta \mapsto \lambda$ 

$$f(\beta) := L \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}$$

# Plan

- 1 Introducción
- 2 Simetría bajo rotación  $2\pi/3$
- 3 El origen
- 4 Cambio de variable
- 5 Ecuación característica

# Polinomio característico después del cambio de variable

## Proposición

Sea  $0 < \lambda < L$  y sea  $\beta := f^{-1}(\lambda)$ . Entonces

$$\det(T_n(\lambda - a)) = M_n(\beta)F_n(\beta),$$

donde  $M_n(\beta)$  es cierto factor no nulo,

$$E_n(\beta) = \sin((n + 1)\beta + \theta(\beta)) + (-1)^n p(\beta)q(\beta)^{n+1},$$

$$\theta(\beta) := \arctan\left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{3}\right), \quad p(\beta) := \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{9 + \operatorname{tg}^2 \beta}}, \quad q(\beta) := \frac{1}{2 \cos \beta}.$$

# Demostración: queremos aplicar la fórmula de Widom

Por la fórmula de Widom,

$$\det T_n(\lambda - a) = (-1)^n \left( S_n^{\{1,2\}}(\lambda) + S_n^{\{1,3\}}(\lambda) + S_n^{\{2,3\}}(\lambda) \right),$$

donde

$$S_n^{\{1,2\}}(\lambda) = \frac{(z_1 z_2)^{n+1}}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)}, \quad S_n^{\{1,3\}}(\lambda) = \frac{(z_1 z_3)^{n+1}}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_2)},$$

$$S_n^{\{2,3\}}(\lambda) = \frac{(z_2 z_3)^{n+1}}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}.$$

# Demostración: definimos $\theta(\beta)$ y calculamos $z_1 - z_3$

$$z_1 = \rho e^{i\beta}, \quad z_2 = \rho e^{-i\beta}, \quad z_3 = -\frac{1}{\rho^2} = -2\rho \cos \beta.$$

# Demostración: definimos $\theta(\beta)$ y calculamos $z_1 - z_3$

$$z_1 = \rho e^{i\beta}, \quad z_2 = \rho e^{-i\beta}, \quad z_3 = -\frac{1}{\rho^2} = -2\rho \cos \beta.$$

Consideramos la diferencia  $z_1 - z_3$ :

$$z_1 - z_3 = \rho(2 \cos \beta + e^{i\beta}) = \rho(3 \cos \beta + i \sin \beta).$$

# Demostración: definimos $\theta(\beta)$ y calculamos $z_1 - z_3$

$$z_1 = \rho e^{i\beta}, \quad z_2 = \rho e^{-i\beta}, \quad z_3 = -\frac{1}{\rho^2} = -2\rho \cos \beta.$$

Consideramos la diferencia  $z_1 - z_3$ :

$$z_1 - z_3 = \rho (2 \cos \beta + e^{i\beta}) = \rho (3 \cos \beta + i \sin \beta).$$

Definimos

$$\theta(\beta) := \arctg \left( \frac{1}{3} \operatorname{tg} \beta \right).$$

# Demostración: definimos $\theta(\beta)$ y calculamos $z_1 - z_3$

$$z_1 = \rho e^{i\beta}, \quad z_2 = \rho e^{-i\beta}, \quad z_3 = -\frac{1}{\rho^2} = -2\rho \cos \beta.$$

Consideramos la diferencia  $z_1 - z_3$ :

$$z_1 - z_3 = \rho (2 \cos \beta + e^{i\beta}) = \rho (3 \cos \beta + i \sin \beta).$$

Definimos

$$\theta(\beta) := \arctg \left( \frac{1}{3} \operatorname{tg} \beta \right).$$

Entonces

$$z_1 - z_3 = |z_1 - z_3| e^{i\theta(\beta)} = \rho \left( \frac{9 + \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right)^{1/2} e^{i\theta(\beta)}.$$

# Demostración: los tres sumandos

$$M_n(\beta) = \frac{(-1)^n 2^{n+1} \rho^{2n} (\cos \beta)^{n-1}}{(9 + \operatorname{tg}^2 \beta)^{1/2} \operatorname{tg} \beta}.$$

Entonces

$$S_n^{\{1,3\}}(\lambda) = -\frac{1}{2} M_n(\beta) i e^{i((n+1)\beta + \theta(\beta))},$$

$$S_n^{\{2,3\}}(\lambda) = \overline{S_n^{\{1,3\}}(\lambda)} = \frac{1}{2} M_n(\beta) i e^{-i((n+1)\beta + \theta(\beta))},$$

$$S_n^{\{1,2\}}(\lambda) = M_n(\beta) \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \beta}{(9 + \operatorname{tg}^2 \beta)^{1/2}} \left( \frac{1}{2 \cos \beta} \right)^{n+1}.$$

# Resumen: la ecuación característica en forma trigonométrica

La ecuación  $\det(T_n(\lambda - a)) = 0$  para  $0 < \lambda < L$   
es equivalente a la ecuación  $E_n(\beta) = 0$  para  $0 < \beta < \frac{\pi}{3}$ .

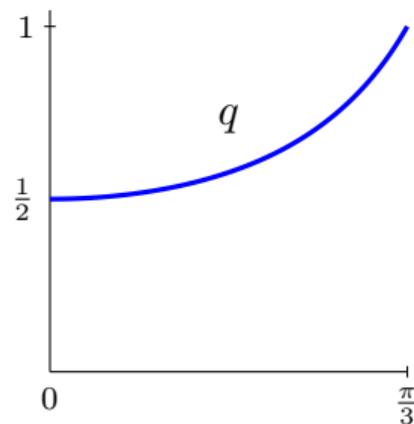
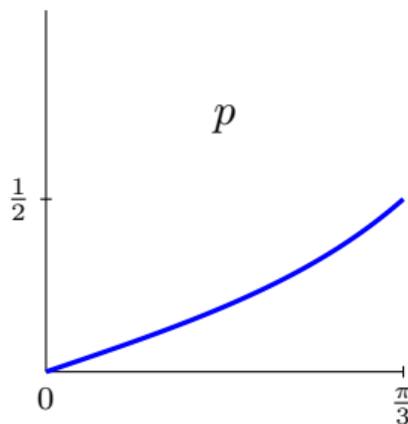
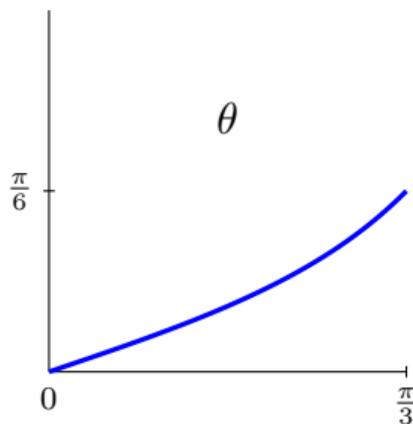
$\lambda$  está relacionado con  $\beta$  mediante la función

$$f(\beta) := L \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}.$$

# Propiedades de las funciones $\theta$ , $p_n$ , $q$

$$E_n(\beta) = \sin((n+1)\beta + \theta(\beta)) + (-1)^n p(\beta) q(\beta)^{n+1},$$

$$\theta(\beta) := \arctan\left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{3}\right), \quad p(\beta) := \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{9 + \operatorname{tg}^2 \beta}}, \quad q(\beta) := \frac{1}{2 \cos \beta}.$$



# Propiedades de las funciones $\theta$ , $p_n$ , $q$

$$E_n(\beta) = \sin((n+1)\beta + \theta(\beta)) + (-1)^n p(\beta) q(\beta)^{n+1},$$

$$\theta(\beta) := \arctan\left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{3}\right), \quad p(\beta) := \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{9 + \operatorname{tg}^2 \beta}}, \quad q(\beta) := \frac{1}{2 \cos \beta}.$$

## Proposición

Las funciones  $\theta$ ,  $p$ ,  $q$  son estrictamente crecientes en  $(0, \frac{\pi}{3})$ . Para cada  $\beta$  en  $(0, \frac{\pi}{3})$ ,

$$0 < \theta(\beta) < \frac{\pi}{6}, \quad 0 < p(\beta) < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < q(\beta) < 1.$$

**Demostración:** cálculo elemental.

# Localización de los ceros de $E_n$

En alguna sesión futura del seminario demostraremos el siguiente resultado.

## Proposición

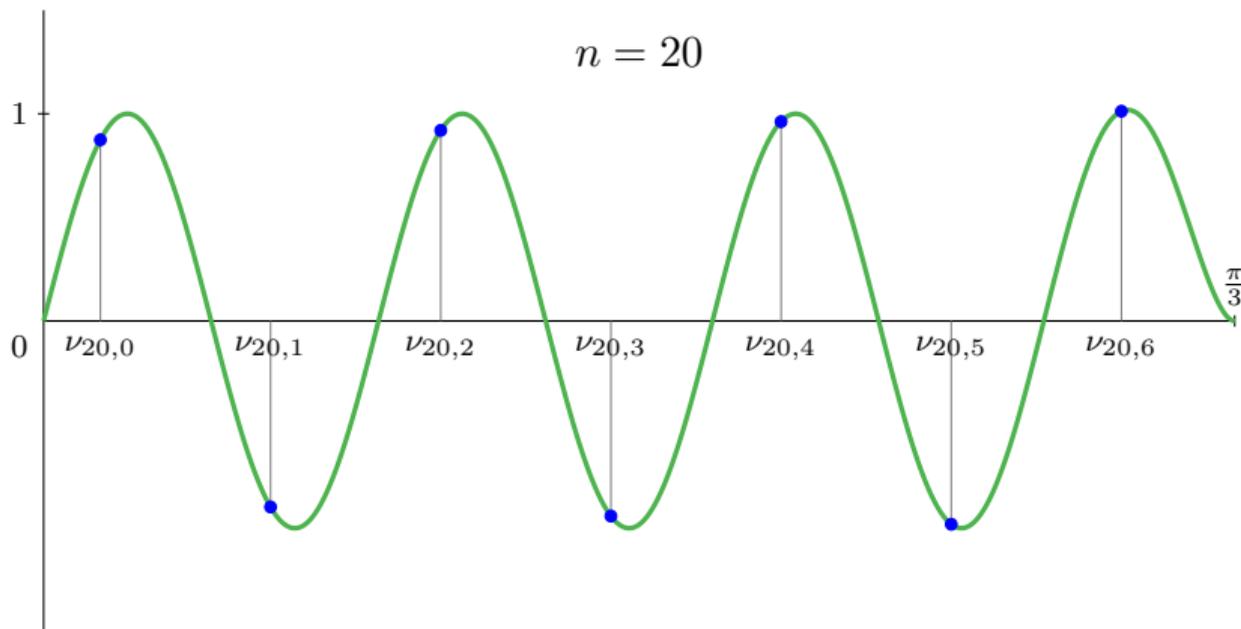
Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ,  $m := \lfloor n/3 \rfloor$ . Para cada  $k$  en  $\{0, 1, \dots, m\}$  pongamos

$$\nu_{n,k} := \frac{\left(k + \frac{1}{3}\right) \pi}{n + 1}.$$

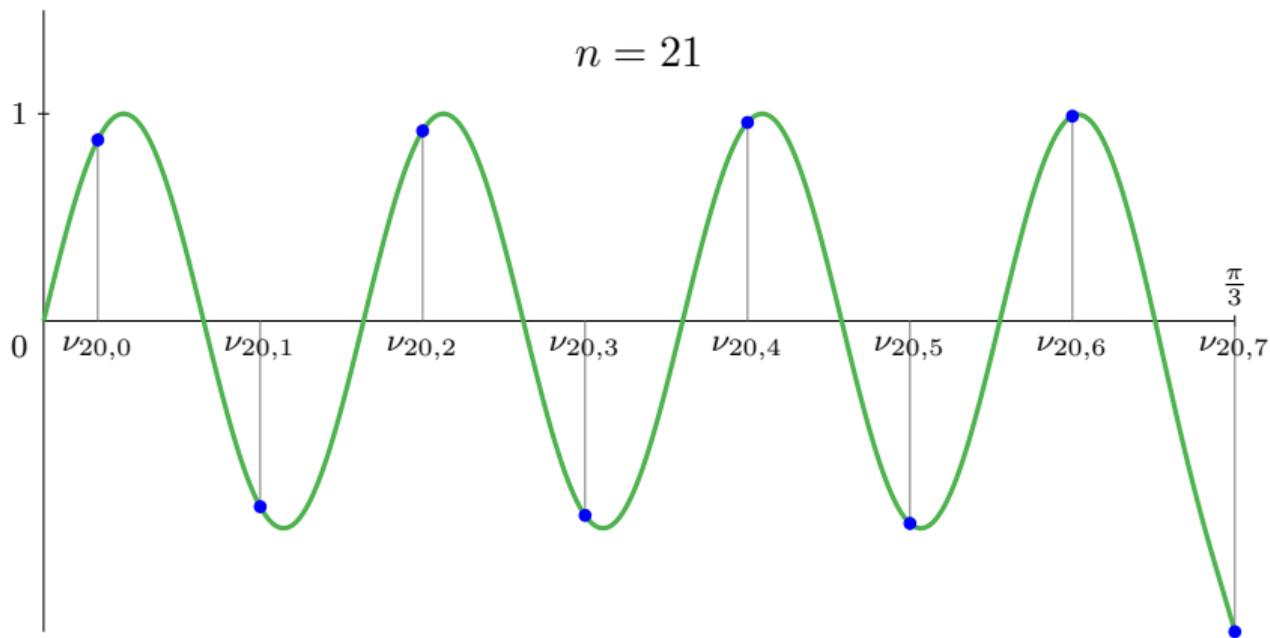
Entonces para cada  $k$  en  $\{0, 1, \dots, m - 1\}$  la función  $E_n$  tiene un cero en

$$\left(\nu_{n,k}, \nu_{n,k+1}\right).$$

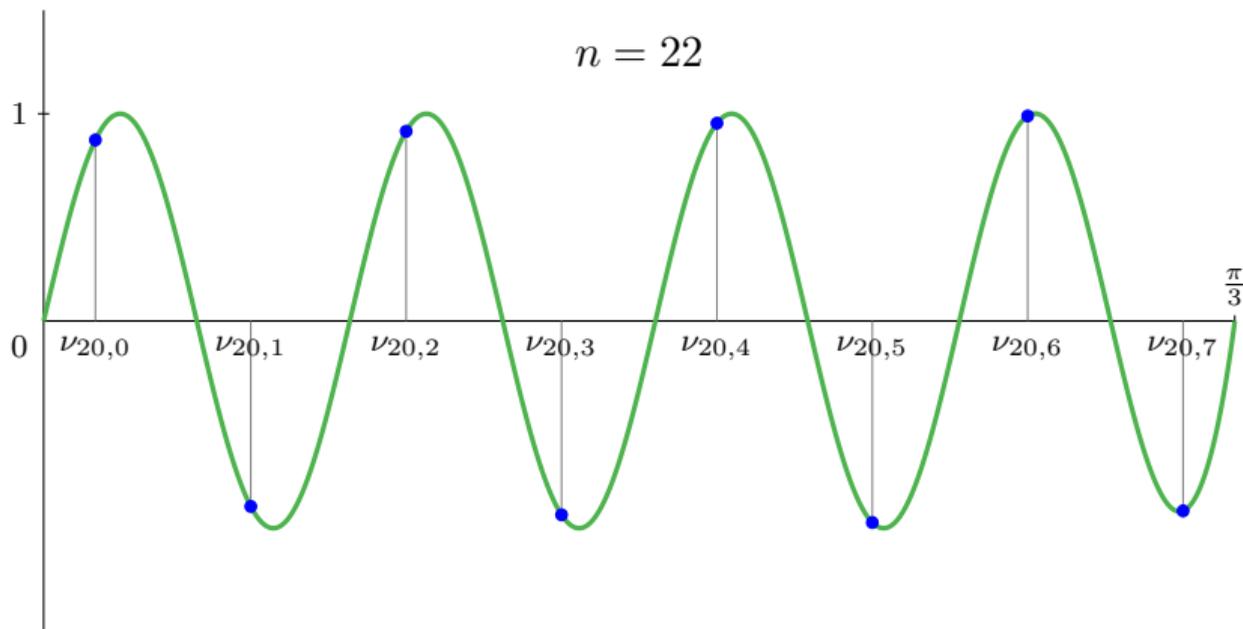
# La gráfica de $E_n$ y los puntos $\nu_{n,k}$



# La gráfica de $E_n$ y los puntos $\nu_{n,k}$



# La gráfica de $E_n$ y los puntos $\nu_{n,k}$



# Temas para la siguiente sesión

- Localización de los valores propios:  $\lambda = f(\beta)$ ,

$$\frac{\left(k + \frac{1}{3}\right) \pi}{n + 1} < \beta < \frac{\left(k + \frac{4}{3}\right) \pi}{n + 1}.$$

- El cambio de variable hiperbólico, para calcular la inversa de  $f$ :

$$f^{-1}(\lambda) = \arctg \left( \sqrt{3} \operatorname{th} \left( \frac{1}{3} \operatorname{arch} \frac{\sqrt{27}}{4\lambda^3} \right) \right).$$

- La distribución asintótica de los valores propios:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(\operatorname{sp}(T_n(a)) \cap (0, x))}{n} = \text{alguna función}(x).$$