Polinomios de Schur y soluciones básicas de las recurrencias lineales

Egor Maximenko, Mario Alberto Moctezuma Salazar

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

50º Congreso Nacional
de la Sociedad Matemática Mexicana
UNAM, Ciudad de México
25 de octubre de 2017

Ejemplo de recurrencia lineal: contamos los ritmos

Fijamos una unidad de tiempo T (por ejemplo, un segundo). $R_n :=$ el número de los ritmos de longitud nT que consisten de sonidos de dos tipos: cortos (T) y muy largos ($3T$).

$R_1 = 1$: $\bullet$

Ejemplo de recurrencia lineal: contamos los ritmos

Fijamos una unidad de tiempo T (por ejemplo, un segundo).
$R_n :=$ el número de los ritmos de longitud nT que consisten de sonidos de dos tipos: cortos (T) y muy largos ($3T$).

$R_1 = 1$: $\bullet$

$R_2 = 1$: $\bullet\bullet$

Ejemplo de recurrencia lineal: contamos los ritmos

Fijamos una unidad de tiempo T (por ejemplo, un segundo).
$R_n \coloneqq$ el número de los ritmos de longitud nT que consisten de sonidos de dos tipos: cortos (T) y muy largos ($3T$).

$R_1 = 1$: $\bullet$

$R_2 = 1$: $\bullet\bullet$

$R_3 = 2$: $\bullet\bullet\bullet$, $\blacksquare$

Ejemplo de recurrencia lineal: contamos los ritmos

Fijamos una unidad de tiempo T (por ejemplo, un segundo).
$R_n :=$ el número de los ritmos de longitud nT que consisten de sonidos de dos tipos: cortos (T) y muy largos ($3T$).

$R_1 = 1$: •

$R_2 = 1$: ••

$R_3 = 2$: •••, ▬

$R_4 = 3$: ••••, •▬, ▬•

Ejemplo de recurrencia lineal: contamos los ritmos

Fijamos una unidad de tiempo T (por ejemplo, un segundo). $R_n :=$ el número de los ritmos de longitud nT que consisten de sonidos de dos tipos: cortos (T) y muy largos ($3T$).

$R_1 = 1$: $\bullet$

$R_2 = 1$: $\bullet\bullet$

$R_3 = 2$: $\bullet\bullet\bullet$, ▬

$R_4 = 3$: $\bullet\bullet\bullet\bullet$, $\bullet$▬, ▬$\bullet$

$R_5 = 4$: $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$, $\bullet\bullet$▬, $\bullet$▬$\bullet$, ▬$\bullet\bullet$

Ejemplo de recurrencia lineal: contamos los ritmos

Fijamos una unidad de tiempo T (por ejemplo, un segundo). $R_n :=$ el número de los ritmos de longitud nT que consisten de sonidos de dos tipos: cortos (T) y muy largos ($3T$).

$R_1 = 1$: •

$R_2 = 1$: ••

$R_3 = 2$: •••, ▬

$R_4 = 3$: ••••, •▬, ▬•

$R_5 = 4$: •••••, ••▬, •▬•, ▬••

$R_6 = 6$: ••••••, •••▬, ••▬•, •▬••, ▬•••, ▬▬

Ejemplo de recurrencia lineal: contamos los ritmos

Fijamos una unidad de tiempo T (por ejemplo, un segundo). $R_n :=$ el número de los ritmos de longitud nT que consisten de sonidos de dos tipos: cortos (T) y muy largos ($3T$).

$R_1 = 1$: ●

$R_2 = 1$: ●●

$R_3 = 2$: ●●●, ▬

$R_4 = 3$: ●●●●, ●▬, ▬●

$R_5 = 4$: ●●●●●, ●●▬, ●▬●, ▬●●

$R_6 = 6$: ●●●●●●, ●●●▬, ●●▬●, ●▬●●, ▬●●●, ▬▬

Recurrencia lineal:

$$R_n = R_{n-1} + R_{n-3}.$$

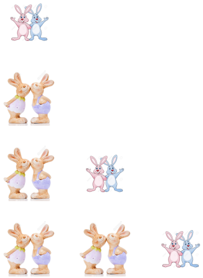
Condiciones iniciales: $R_0 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1$.

Sucesión de Fibonacci (Leonardo de Pisa)

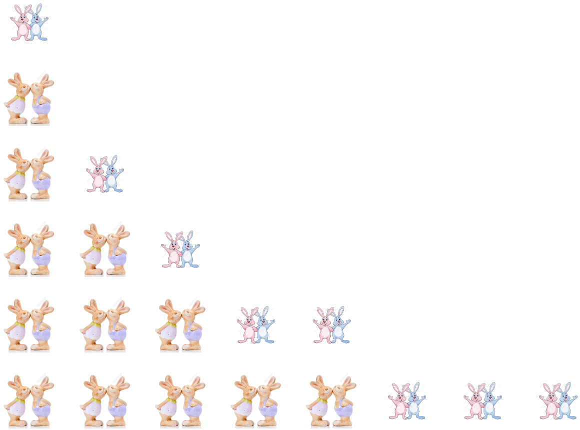
Sucesión de Fibonacci (Leonardo de Pisa)

Sucesión de Fibonacci (Leonardo de Pisa)

Sucesión de Fibonacci (Leonardo de Pisa)



Sucesión de Fibonacci (Leonardo de Pisa)



Sucesión de Fibonacci (Leonardo de Pisa)

$F_1 = 1$

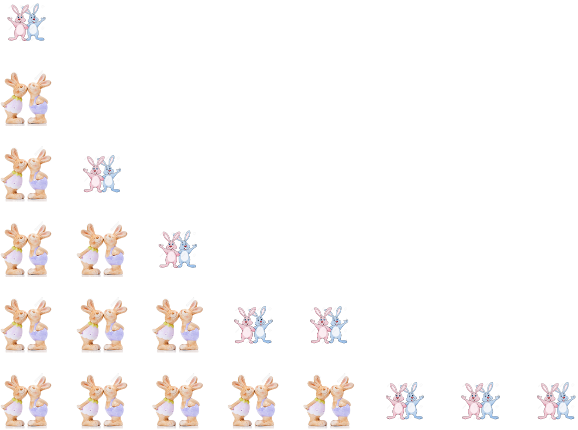
$F_2 = 1$

$F_3 = 2$

$F_4 = 3$

$F_5 = 5$

$F_6 = 8$



$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

Recurrencia lineal homogénea de orden d con coeficientes constantes

Para cada $n \geq d$,

$$f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots + a_d f_{n-d} = 0. \qquad \text{(RecLin)}$$

Recurrencia lineal homogénea de orden d con coeficientes constantes

Para cada $n \geq d$,

$$\underbrace{a_0}_{1} f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots + a_d f_{n-d} = 0. \qquad \text{(RecLin)}$$

Recurrencia lineal homogénea de orden d con coeficientes constantes

Para cada $n \geq d$,

$$\underbrace{a_0}_{1} f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots + a_d f_{n-d} = 0. \qquad \text{(RecLin)}$$

Definición (polinomio característico)

$$a(t) = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \cdots + a_d t^0.$$

Recurrencia lineal homogénea de orden d con coeficientes constantes

Para cada $n \ge d$,

$$\underbrace{a_0}_{1} f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots + a_d f_{n-d} = 0. \qquad \text{(RecLin)}$$

Definición (polinomio característico)

$$a(t) = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \cdots + a_d t^0.$$

Definición (conjunto solución)

$L_a :=$ el conjunto de las sucesiones complejas $f = (f_k)_{k=0}^{\infty}$ que satisfacen (RecLin) para cada $n \ge d$.

Recurrencia lineal homogénea de orden d con coeficientes constantes

Para cada $n \geq d$,

$$\underbrace{a_0}_{1} f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots + a_d f_{n-d} = 0. \qquad \text{(RecLin)}$$

Definición (polinomio característico)

$$a(t) = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \cdots + a_d t^0.$$

Definición (conjunto solución)

$L_a :=$ el conjunto de las sucesiones complejas $f = (f_k)_{k=0}^{\infty}$ que satisfacen (RecLin) para cada $n \geq d$.

L es un espacio vectorial.

Condiciones iniciales

Recurrencia lineal de orden 2 con dos valores iniciales v_0 y v_1:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= v_0, \\
f_1 &= v_1, \\
f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_0 &= 0, \\
f_3 + a_1 f_2 + a_2 f_1 &= 0, \\
f_4 + a_1 f_3 + a_2 f_2 &= 0, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Proposición (existencia y unicidad de solución de rec. lin.)

Sean $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{C}$ y $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{C}$.
Entonces existe una única sucesión f en L_a tal que

$$f_0 = v_0, \quad f_1 = v_1, \quad \ldots, \quad f_{d-1} = v_{d-1}.$$

Método clásico de solución, para $d = 2$

Consideramos la recurrencia lineal de segundo orden:

$$f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0 \qquad (n \geq 2).$$

Denotamos por x_1 y x_2 a las raíces del polinomio característico:

$$a(t) = t^2 + a_1 t + a_2 = (t - x_1)(t - x_2).$$

Las progresiones geométricas

$$(x_1^k)_{k=0}^{\infty}, \qquad (x_2^k)_{k=0}^{\infty}$$

son soluciones de la recurrencia lineal:

$$x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} = x_1^{n-2}(x_1^2 + a_1 x_1 + a_2) = 0.$$

Consideramos el caso $x_1 \neq x_2$.
Entonces $(x_1^n)_{n=0}^{\infty}$ y $(x_2^n)_{n=0}^{\infty}$ forman una base de L_a.

Método clásico de solución, para $d = 2$

Consideramos el caso $x_1 \neq x_2$. La solución general es

$$f_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n.$$

Los coeficientes se determinan por las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} n = 0\colon \quad & \alpha x_1^0 + \beta x_2^0 = v_0, \\ n = 1\colon \quad & \alpha x_1^1 + \beta x_2^1 = v_1. \end{aligned}$$

En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 \\ x_1^1 & x_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}.$$

Como $x_1 \neq x_2$, el determinante de Vandermonde es no nulo, y el sistema tiene una única solución.

Método clásico para $d = 3$

Para $d = 3$, si x_1, x_2, x_3 son diferentes a pares, entonces

$$f_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n,$$

donde los coeficientes α, β, γ se determinan del sistema

$$\begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Un defecto de esta forma de la solución:

las condiciones iniciales $v_0, \ldots, v_{d-1}$
no aparecen de manera simple en la respuesta.

Busquemos soluciones básicas

Denotemos por $b^{(0)}, \ldots, b^{(d-1)}$ a las sucesiones de clase L_a que se determinan por los siguientes valores iniciales:

$$
\begin{aligned}
b^{(0)} &= (\overbrace{1,\,0,\,\ldots,\,0}^{d},\,?,\,?,\,\ldots),\\
b^{(1)} &= (\,0,\,1,\,\ldots,\,0,\,?,\,?,\,\ldots\,),\\
&\ldots\\
b^{(d-1)} &= (\,0,\,0,\,\ldots,\,1,\,?,\,?,\,\ldots\,).
\end{aligned}
$$

Formalmente,

$$
b_k^{(j)} = \delta_{j,k} \qquad (0 \le k < j).
$$

Solución general en términos de las soluciones básicas

Proposición

Sea $f \in L_a$. Entonces $$f = \sum_{j=0}^{d-1} f_j b^{(j)}.$$

¡Los coeficientes son los valores iniciales!

Demostración.

La sucesión $g \coloneqq \sum_{j=0}^{d-1} f_j b^{(j)}$ es de clase L_a.
Además, tiene los mismos valores iniciales que la sucesión f.
En efecto, si $k < d$, entonces

$$g_k = \sum_{j=0}^{d-1} f_j \delta_{j,k} = f_k.$$

□

Soluciones básicas para $d = 2$

$$t^2 + a_1 t + a_2 = (t - x_1)(t - x_2) = t^2 + \underbrace{(-x_1 - x_2)}_{a_1} t^1 + \underbrace{x_1 x_2}_{a_0} t^0.$$

Si $f \in L_a$, entonces para cada $n \geq 2$

$$f_n = -a_1 f_{n-1} - a_2 f_{n-2} = (x_1 + x_2) f_{n-1} - x_1 x_2 f_{n-2}.$$

Las soluciones básicas empiezan con las siguientes componentes:

$$b^{(0)} = (1,\ 0,\ -x_1 x_2,\ -(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2),\ \ldots),$$
$$b^{(1)} = (0,\ 1,\ x_1 + x_2,\ x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2,\ \ldots).$$

Soluciones básicas para $d = 2$

$$t^2 + a_1 t + a_2 = (t - x_1)(t - x_2) = t^2 + \underbrace{(-x_1 - x_2)}_{a_1} t^1 + \underbrace{x_1 x_2}_{a_0} t^0.$$

Si $f \in L_a$, entonces para cada $n \geq 2$

$$f_n = -a_1 f_{n-1} - a_2 f_{n-2} = (x_1 + x_2) f_{n-1} - x_1 x_2 f_{n-2}.$$

Las soluciones básicas empiezan con las siguientes componentes:

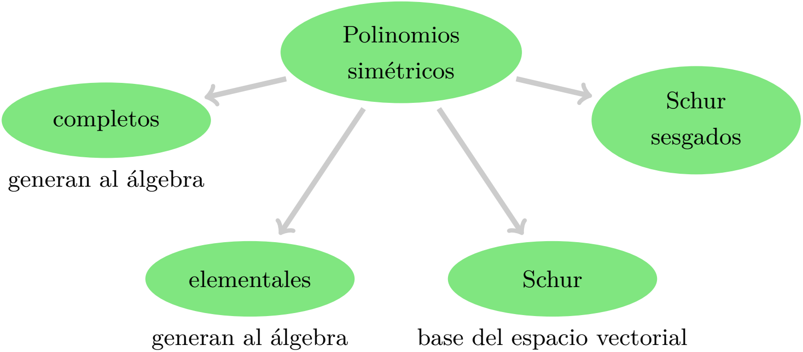
$$b^{(0)} = (1,\ 0,\ -x_1 x_2,\ -(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2),\ \ldots),$$
$$b^{(1)} = (0,\ 1,\ x_1 + x_2,\ x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2,\ \ldots).$$

¡Las componentes son polinomios simétricos homogéneos!

Algunas familias de polinomios simétricos

Macdonald (1995): Symmetric functions and Hall polynomials.

Stanley (1999): Enumerative combinatorics, vol. 2.



Polinomios simétricos completos

$$
\begin{aligned}
h_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\
h_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\
h_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 \\
&\quad + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1x_2x_3.
\end{aligned}
$$

Definición

El polinomio simétrico completo de orden k en n variables es la suma de todos los monomios de grado total k:

$$h_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_n \geq 0 \\ p_1+p_2+\cdots+p_n=k}} x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}.$$

Polinomios simétricos elementales

$$
\begin{aligned}
e_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1+x_2+x_3+x_4,\\
e_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4,\\
e_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4,\\
e_4(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}
$$

Definición

El polinomio simétrico elemental de grado k en n variables es la suma de todos los productos de k variables diferentes:

$$e_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}.$$

Fórmula de Vieta (François Viète, 1540–1603)

Proposición

Los coeficientes del polinomio mónico

$$a(t) = t^d + a_1 t^{d-1} + \cdots + a_{d-1} t + a_d = \prod_{j=1}^{d} (t - x_j)$$

son polinomios elementales de sus raíces, con signos alternados:

$$a_k = (-1)^k e_k(x_1, \ldots, x_d).$$

$$a(t) = t^2 + a_1 t + a_2 = (t - x_1)(t - x_2),$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 = e_0(x_1, x_2), \\ a_1 &= -(x_1 + x_2) = -e_1(x_1, x_2), \\ a_2 &= x_1 x_2 = e_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Recurrencia lineal en términos de los pol. elementales

La recurrencia lineal

$$f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots + a_d f_{n-d} = 0 \qquad \text{(RecLin)}$$

se escribe como

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k e_k(x_1, \ldots, x_d) f_{n-k} = 0 \qquad (n \geq d).$$

Otra forma equivalente:

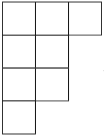
$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k e_{d-k}(x_1, \ldots, x_d) f_{n+k} = 0 \qquad (n \geq 0).$$

Particiones enteras y sus diagramas de Young

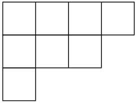
Particiones enteras son listas finitas débilmente decrecientes de números enteros no negativos.

$$\lambda = (3, 2, 2, 1).$$

Cada partición entera se identifica con su diagrama:

$\lambda =$  .

La partición conjugada corresponde al diagrama transpuesto:

$\lambda' =$  $= (4, 3, 1).$

Varias definiciones equivalentes de polinomios de Schur

Dada una partición entera $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,
el polinomio de Schur $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ es cierto polinomio simétrico homogéneo de grado $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Hay varias definiciones equivalentes de $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$:

- por la fórmula de Jacobi–Trudi, en términos de h_k,
- por la fórmula dual de Jacobi–Trudi, en términos de e_k,
- usando determinantes generalizados de Vandermonde,
- por medio de tablas semiestándares de Young, etc.

Los polinomios de Schur forman una base del espacio vectorial de los polinomios simétricos.

Definición de polinomios de Schur por la fórmula de Jacobi–Trudi

La fórmula de Jacobi–Trudi expresa los polinomios de Schur en términos de polinomios simétricos homogéneos completos.

Definición

$$s_\lambda = \det[h_{\lambda_j - j + k}]_{j,k=1}^n.$$

Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, entonces

$$s_\lambda = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & h_{\lambda_1+2} & h_{\lambda_1+3} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & h_{\lambda_2+1} & h_{\lambda_2+2} \\ h_{\lambda_3-2} & h_{\lambda_3-1} & h_{\lambda_3} & h_{\lambda_3+1} \\ h_{\lambda_4-3} & h_{\lambda_4-2} & h_{\lambda_4-1} & h_{\lambda_4} \end{vmatrix}.$$

La fórmula dual de Jacobi–Trudi (la identidad de Nägelsbach–Kostka)

Expresa polinomios de Schur en términos de polinomios simétricos elementales, usando la partición conjugada.

Proposición

$$s_\lambda = \det[e_{\lambda'_j - j + k}]_{j,k=1}^{\lambda_1}.$$

Si $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$, entonces

$$s_\lambda = \begin{vmatrix} e_{\lambda'_1} & e_{\lambda'_1+1} & e_{\lambda'_1+2} \\ e_{\lambda'_2-1} & e_{\lambda'_2} & e_{\lambda'_2+1} \\ e_{\lambda'_3-2} & e_{\lambda'_3-1} & e_{\lambda'_3} \end{vmatrix}.$$

Pol. de Schur y det. generalizados de Vandermonde

Proposición

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\det\left[x_k^{\lambda_j+n-j}\right]_{j,k=1}^{n}}{\det\left[x_k^{n-j}\right]_{j,k=1}^{n}}.$$

$$s_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+2} & x_2^{\lambda_1+2} & x_3^{\lambda_1+2} \\ x_1^{\lambda_2+1} & x_2^{\lambda_2+1} & x_3^{\lambda_2+1} \\ x_1^{\lambda_3} & x_2^{\lambda_3} & x_3^{\lambda_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \end{vmatrix}}.$$

Polinomios de Schur y tablas de Young

Las tablas semiestándares del diagrama $\lambda = (2, 2, 1, 1)$ son

Polinomios de Schur y tablas de Young

Las tablas semiestándares del diagrama $\lambda = (2, 2, 1, 1)$ son

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Polinomios de Schur y tablas de Young

Las tablas semiestándares del diagrama $\lambda = (2, 2, 1, 1)$ son

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.
$$

El correspondiente polinomio de Schur $s_{(3,2,2,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ es

$$
\begin{aligned}
& x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2^2 x_3^2 x_4 \\
& + x_1^2 x_2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3^2 x_4^2.
\end{aligned}
$$

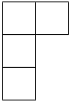
Ejemplo: calculemos $s_{(3,1)}(x_1, x_2)$

I. Empecemos con la fórmula de Jacobi–Trudi:

$$
\begin{aligned}
s_{(3,1)}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} h_3 & h_4 \\ h_0 & h_1 \end{vmatrix} &= h_3 h_1 - h_4 h_0 \\
&= (x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3)(x_1 + x_2) \\
&\quad - (x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_2^4) \\
&= x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3.
\end{aligned}
$$

Ejemplo: calculemos $s_{(3,1)}(x_1, x_2)$

II. Calculamos el diagrama conjugado:

$\lambda = (3,1) =$ , $\lambda' =$  $= (2,1,1),$

y aplicamos la fórmula dual de Jacobi–Trudi:

$$s_{(3,1)}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ e_0 & e_1 & e_2 \\ e_{-1} & e_0 & e_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_2 & 0 & 0 \\ e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_0 & e_1 \end{vmatrix}$$

$$= e_2(e_1^2 - e_2)$$

$$= x_1 x_2((x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2)$$

$$= x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3.$$

Ejemplo: calculemos $s_{(3,1)}(x_1, x_2)$

III. Usamos determinantes de Vandermonde generalizados:

$$s_{(3,1)}(x_1,x_2) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_2^4 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^0 & x_2^0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{x_1^4 x_2 - x_1 x_2^4}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 x_2 (x_1^3 - x_2^3)}{x_1 - x_2}$$

$$= x_1 x_2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$= x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3.$$

Ejemplo: calculemos $s_{(3,1)}(x_1, x_2)$

IV. Finalmente, hallamos todas las tablas de Young semiestándares:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

y las convertimos en monomios:

$$s_{(3,1)}(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3.$$

Elementales y completos como polinomios de Schur

Proposición

$$e_k = s_{(1^k)}, \qquad h_k = s_{(k)}.$$

Elementales y completos como polinomios de Schur

Proposición

$$e_k = s_{(1^k)}, \qquad h_k = s_{(k)}.$$

$$\begin{aligned}
e_2(x_1,x_2,x_3) &= s_{(1,1)}(x_1,x_2,x_3) \\
&= \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \\
&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(x_1,x_2,x_3) &= s_{(2)}(x_1,x_2,x_3) \\
&= \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline\end{array} \\
&= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2.
\end{aligned}$$

Elementales y completos como polinomios de Schur

Proposición

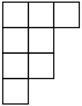
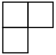
$$e_k = s_{(1^k)}, \qquad h_k = s_{(k)}.$$

$$\begin{aligned} e_2(x_1, x_2, x_3) &= s_{(1,1)}(x_1, x_2, x_3) \\ &= \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \end{aligned}$$

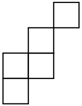
$$\begin{aligned} h_2(x_1, x_2, x_3) &= s_{(2)}(x_1, x_2, x_3) \\ &= \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \\ &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2. \end{aligned}$$

Particiones sesgadas y sus diagramas

Los diagramas de las particiones $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ y $\mu = (2, 1)$ son

$\lambda =$ , $\mu =$ .

La partición sesgada $\lambda/\mu = (3, 2, 2, 1)/(2, 1)$ tiene diagrama

.

Jacobi–Trudi para polinomios de Schur sesgados

Definición

$$s_{\lambda/\mu} = \det[h_{\lambda_j-\mu_k-j+k}]_{j,k=1}^{n}.$$

$$s_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)/(\mu_1,\mu_2)} = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1-\mu_1} & h_{\lambda_1-\mu_2+1} & h_{\lambda_1-\mu_3+2} \\ h_{\lambda_2-\mu_1-1} & h_{\lambda_2-\mu_2} & h_{\lambda_2-\mu_3+1} \\ h_{\lambda_3-\mu_1-2} & h_{\lambda_3-\mu_2-1} & h_{\lambda_3-\mu_3} \end{vmatrix}.$$

Jacobi–Trudi para polinomios de Schur sesgados

Definición

$$s_{\lambda/\mu} = \det[h_{\lambda_j - \mu_k - j + k}]_{j,k=1}^{n}.$$

$$s_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)/(\mu_1,\mu_2)} = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1-\mu_1} & h_{\lambda_1-\mu_2+1} & h_{\lambda_1-\mu_3+2} \\ h_{\lambda_2-\mu_1-1} & h_{\lambda_2-\mu_2} & h_{\lambda_2-\mu_3+1} \\ h_{\lambda_3-\mu_1-2} & h_{\lambda_3-\mu_2-1} & h_{\lambda_3-\mu_3} \end{vmatrix}.$$

Proposición

$$s_{\lambda/\mu} = \det[e_{\lambda'_j - \mu'_k - j + k}]_{j,k=1}^{\lambda_1}.$$

Tablas sesgadas y polinomios sesgados de Schur

Calculemos $s_{(4,3,2)/(3,1)}(x_1, x_2)$ usando tablas de Young:

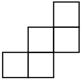
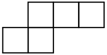
$$\ytableaushort{\none\none\none1,\none11,12}\,,\quad \ytableaushort{\none\none\none1,\none11,22}\,,\quad \ytableaushort{\none\none\none1,\none12,12}\,,\quad \ytableaushort{\none\none\none2,\none11,12}\,,$$

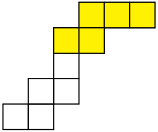
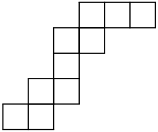
$$\ytableaushort{\none\none\none1,\none12,22}\,,\quad \ytableaushort{\none\none\none2,\none12,12}\,,\quad \ytableaushort{\none\none\none2,\none11,22}\,,\quad \ytableaushort{\none\none\none2,\none12,22}\,.$$

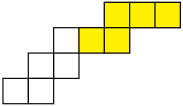
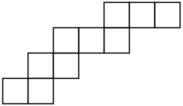
Cada tabla se convierte en un monomio:

$$s_{(4,3,2)/(3,1)}(x_1, x_2) = x_1^4 x_2 + 3x_1^3 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^3 + x_1 x_2^4.$$

Dos operaciones de concatenación de diagramas

$D_1 = (3,3,2)/(2,1) =$ , $\qquad D_2 = (4,2)/(1) =$ .

$D_1 \uparrow D_2 =$  $=$ ,

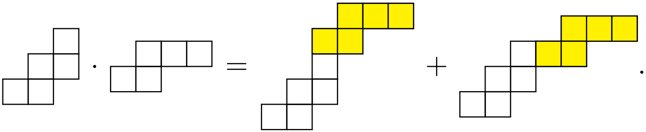
$D_1 \leftarrow D_2 =$  $=$ .

Producto de polinomios de Schur sesgados

Proposición

Sean D_1 y D_2 diagramas sesgados. Entonces

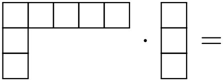
$$s_{D_1} s_{D_2} = s_{D_1 \uparrow D_2} + s_{D_1 \leftarrow D_2}.$$



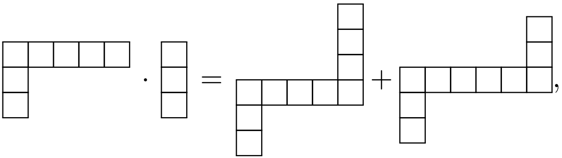
En otra notación,

$$s_{(3,3,2)/(2,1)} s_{(4,2)/(1)} = s_{(6,4,3,3,2)/(3,2,2,1)} + s_{(7,5,3,2)/(4,2,1)}.$$

Productos de ganchos por elementales



Productos de ganchos por elementales



Productos de ganchos por elementales

$$\ydiagram{5,1,1} \cdot \ydiagram{1,1,1} = \ydiagram{4+1,4+1,4+1,5,1,1} + \ydiagram{5+1,5+1,6,1,1},$$

$$\ydiagram{6,1,1} \cdot \ydiagram{1,1} = \ydiagram{5+1,5+1,6,1,1} + \ydiagram{6+1,7,1,1},$$

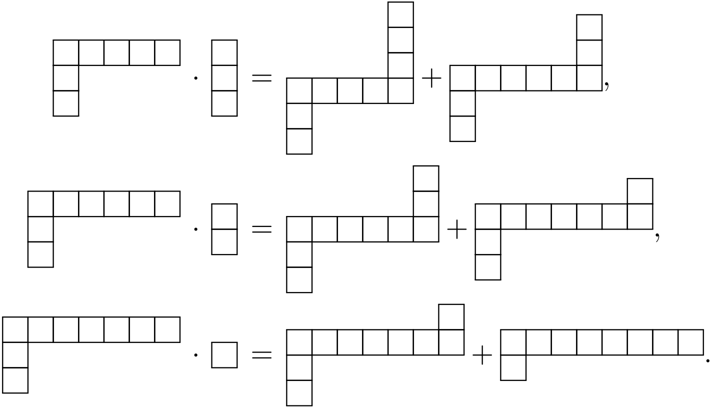
Productos de ganchos por elementales

$$\ydiagram{5,1,1} \cdot \ydiagram{1,1,1} = \ydiagram{4+1,4+1,4+1,5,1,1} + \ydiagram{5+1,5+1,6,1,1},$$

$$\ydiagram{6,1,1} \cdot \ydiagram{1,1} = \ydiagram{5+1,5+1,6,1,1} + \ydiagram{6+1,7,1,1},$$

$$\ydiagram{7,1,1} \cdot \ydiagram{1} = \ydiagram{6+1,7,1,1} + \ydiagram{8,1}.$$

Productos de ganchos por elementales



Sumamos estas igualdades alternando los signos:

$$e_3 s_{(5,1^2)} - e_2 s_{(6,1^2)} + e_1 s_{(7,1^2)} - e_0 s_{(8,1^2)} = s_{(5^4,1^2)/(4^3)}.$$

Identidades tipo Newton para polinomios de Schur

Proposición

Sean $d \geq 0$, $p \geq 1$, $q \geq 0$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k e_{d-k} s_{(p+k,1^q)} = s_{(p^{d+1},1^q)/((p-1)^d)}.$$

Identidades tipo Newton para polinomios de Schur

Proposición

Sean $d \geq 0$, $p \geq 1$, $q \geq 0$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k e_{d-k} s_{(p+k,1^q)} = s_{(p^{d+1},1^q)/((p-1)^d)}.$$

Si el número de variables es d, entonces el lado derecho es cero:

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k e_{d-k}(x_1,\ldots,x_d) s_{(p+k,1^q)}(x_1,\ldots,x_d) = 0.$$

Identidades tipo Newton para polinomios de Schur

Una versión más general de la fórmula anterior:

Proposición

Sean $d \geq 0$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k e_{d-k} s_{(\lambda_1+k,\lambda_2,\dots,\lambda_n)} = s_{(\lambda_1^{d+1},\lambda_2,\dots,\lambda_n)/((\lambda_1-1)^d)}.$$

Soluciones básicas en términos de polinomios de Schur

Teorema

Sea $0 \leq j < d$. La solución de (RecLin) con condiciones iniciales

$$b_k^{(j)} = \delta_{j,k} \qquad (0 \leq k < d).$$

está dada por

$$b_k^{(j)} = (-1)^{d-j-1} s_{(k+1-d,1^{d-j-1})}.$$

Soluciones básicas en términos de polinomios de Schur

Teorema

Sea $0 \leq j < d$. La solución de (RecLin) con condiciones iniciales

$$b_k^{(j)} = \delta_{j,k} \qquad (0 \leq k < d).$$

está dada por

$$b_k^{(j)} = (-1)^{d-j-1} s_{(k+1-d,1^{d-j-1})}.$$

Otras demostraciones de este resultado:

William F. Trench (1985), doi:10.1137/0606054

Alain Lascoux (2009), `http://lipn.univ-paris13.fr/~duchamp/Books&more/Lascoux/RecurSeq.pdf`

Ejemplo: solución básica $b^{(0)}$ para $d = 2$

$$b_k^{(0)} = -s_{(k-1,1)}(x_1, x_2).$$

$$b_0^{(0)} = s_{(-1,1)}(x_1, x_2) = 1,$$

$$b_1^{(0)} = s_{(0,1)}(x_1, x_2) = 0,$$

$$b_2^{(0)} = -s_{(1,1)} = -\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = -x_1 x_2,$$

$$b_3^{(0)} = -s_{(2,1)} = -\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \right) = -(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2).$$

$$b_k^{(0)} = -\frac{x_1 x_2 (x_1^{k-1} - x_2^{k-1})}{x_1 - x_2}.$$

Si $x_1 = x_2$, entonces $b_k^{(0)} = -(k-1)x_1^k$.

Ejemplo: solución básica $b^{(1)}$ para $d = 2$

$$b_k^{(1)} = s_{(k-1)}(x_1, x_2).$$

$$\begin{aligned}
b_0^{(1)} &= s_{(-1)} = 0,\\
b_1^{(1)} &= s_{(0)} = 1,\\
b_2^{(1)} &= s_{(1)} = \boxed{1} + \boxed{2} = x_1 + x_2,\\
b_3^{(1)} &= s_{(2)} = \boxed{1\,|\,1} + \boxed{1\,|\,2} + \boxed{2\,|\,2} = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.
\end{aligned}$$

$$b_k^{(1)} = \frac{x_1^k - x_2^k}{x_1 - x_2}.$$

Si $x_1 = x_2$, entonces

$$b_k^{(1)} = k x_1^{k-1}.$$

Ejemplo: la sucesión de Fibonacci

Consideramos la recurrencia lineal asociada al polinomio

$$a(t) = t^2 - t - 1 = (t - \phi)(t + \phi^{-1}), \quad \text{donde} \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

con condiciones iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.

La solución de este problema es la solución básica $b^{(1)}$:

$$F_k = b_k^{(1)} = s_{(k-1)}(x_1, x_2) = \frac{x_1^k - x_2^k}{x_1 - x_2} = \frac{\phi^k - (-\phi)^{-k}}{\sqrt{5}}.$$

Hemos llegado a la fórmula de Binet.