

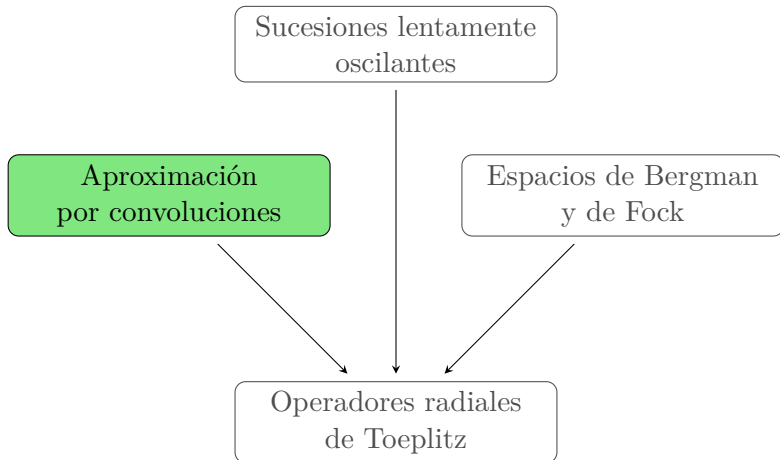
Álgebras C^* generadas por los operadores radiales de Toeplitz en los espacios de Bergman y de Segal-Bargmann-Fock

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Jornadas de análisis matemático y sus aplicaciones
UAM-Azcapotzalco

La plática está basada en trabajos conjuntos con
Kevin Esmeral,
Sergei Grudsky,
Crispin Herrera Yañez
y Nikolai Vasilevski.



Funciones acotadas uniformemente continuas

Módulo de continuidad

Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, se define $\omega_f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$,

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|: x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta\}.$$

Funciones acotadas uniformemente continuas

$$C_u(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^{\mathbb{R}}: \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty \quad \wedge \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0 \right\}.$$

Proposición. $C_u(\mathbb{R})$ es una subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{R})$.

Convolución y transformada de Fourier

Convolución

Dadas $k \in L^1(\mathbb{R})$ y $f \in L^\infty(\mathbb{R})$,

$$(k * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} k(x - y) f(y) dy.$$

Es fácil ver que $k * f \in C_u(\mathbb{R})$.

Transformada de Fourier

Dada $k \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\widehat{k}(t) := \int_{\mathbb{R}} k(x) e^{-2\pi i x t} dx.$$

Sucesiones de Dirac

Una sucesión $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ en $L^1(\mathbb{R})$ es una **sucesión de Dirac** si:

- ① $u_j(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$;
- ② para cada j en \mathbb{N} ,

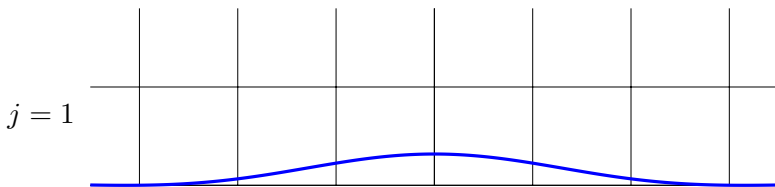
$$\int_{\mathbb{R}} u_j(x) dx = 1;$$

- ③ para cada $\delta > 0$,

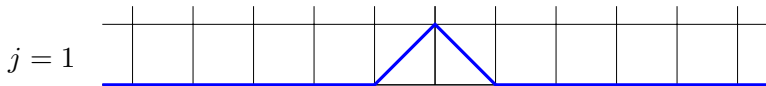
$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} u_j(x) dx = 0.$$

Ejemplo de una sucesión de Dirac: el núcleo de Fejér

$$u_j(x) = \frac{(\sin(\pi j x))^2}{j \pi^2 x^2}.$$

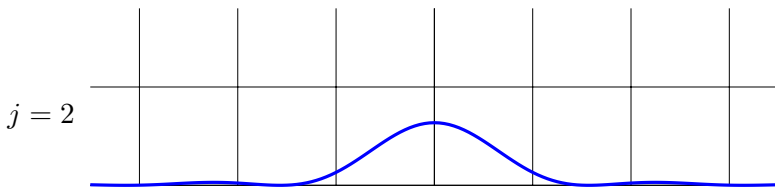


$$\widehat{u}_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{j}, & |t| \leq j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

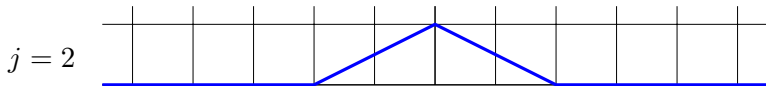


Ejemplo de una sucesión de Dirac: el núcleo de Fejér

$$u_j(x) = \frac{(\sin(\pi j x))^2}{j \pi^2 x^2}.$$

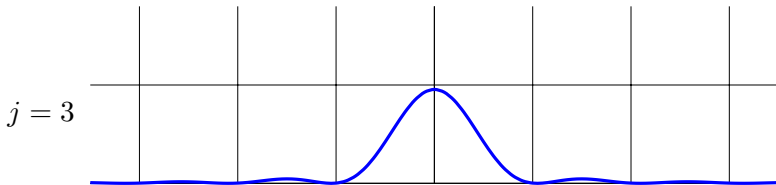


$$\widehat{u}_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{j}, & |t| \leq j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

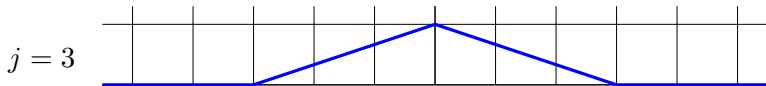


Ejemplo de una sucesión de Dirac: el núcleo de Fejér

$$u_j(x) = \frac{(\sin(\pi j x))^2}{j \pi^2 x^2}.$$

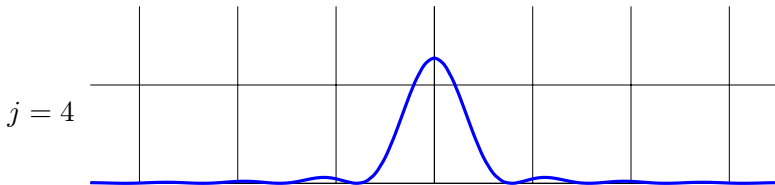


$$\widehat{u}_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{j}, & |t| \leq j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

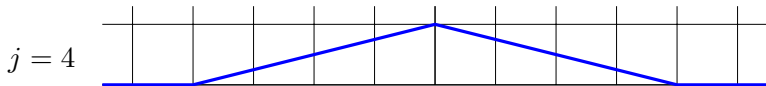


Ejemplo de una sucesión de Dirac: el núcleo de Fejér

$$u_j(x) = \frac{(\sin(\pi j x))^2}{j \pi^2 x^2}.$$

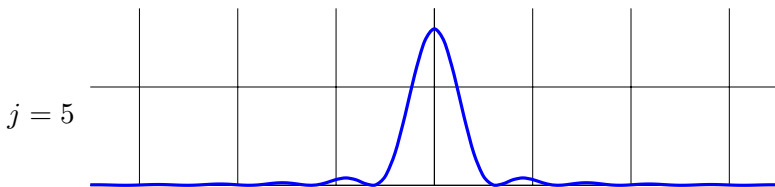


$$\widehat{u}_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{j}, & |t| \leq j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Ejemplo de una sucesión de Dirac: el núcleo de Fejér

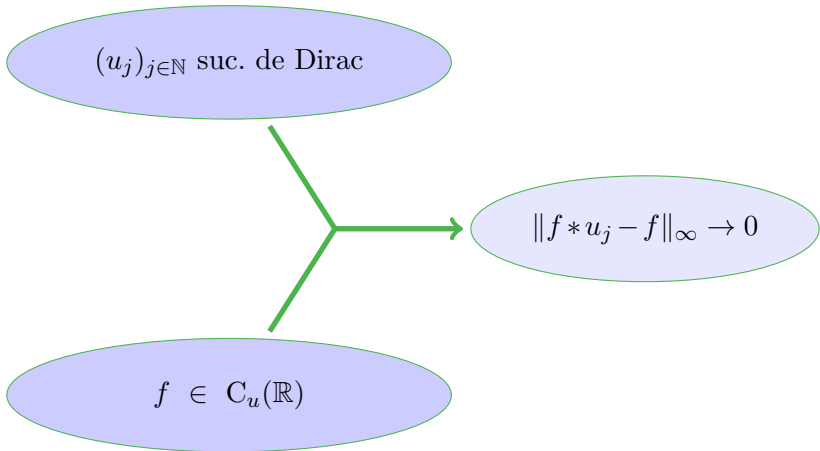
$$u_j(x) = \frac{(\sin(\pi j x))^2}{j \pi^2 x^2}.$$



$$\widehat{u}_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{j}, & |t| \leq j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Propiedad aproximativa de sucesiones de Dirac



Lema de división (de Wiener)

$f \in L^1(\mathbb{R})$
 $\text{supp}(\widehat{f})$ es compacto

$g \in L^1(\mathbb{R})$
 $\forall x \in \text{supp}(\widehat{f}) \quad \widehat{g}(x) \neq 0$

$\exists h \in L^1(\mathbb{R})$
 $f = g * h$

Funciones acotadas uniformemente continuas se pueden aproximar uniformemente por convoluciones

Teorema de aproximación. Sea $k \in L^1(\mathbb{R})$. Supongamos que k satisface la condición de Wiener:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \widehat{k}(t) \neq 0.$$

Entonces $\{k * g : g \in L^\infty(\mathbb{R})\}$ es un subconjunto denso $C_u(\mathbb{R})$.

Funciones acotadas uniformemente continuas se pueden aproximar uniformemente por convoluciones

Teorema de aproximación. Sea $k \in L^1(\mathbb{R})$. Supongamos que k satisface la condición de Wiener:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \widehat{k}(t) \neq 0.$$

Entonces $\{k * g : g \in L^\infty(\mathbb{R})\}$ es un subconjunto denso $C_u(\mathbb{R})$.

No hemos podido encontrar este resultado en literatura,
por eso incluimos una prueba en
Esmeral, Maximenko (2016) doi:10.1007/s11785-016-0557-0

Demostración del teorema de aproximación

Sea $f \in C_u(\mathbb{R})$.

Sea $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ el núcleo de Fejér

o cualquier otra sucesión Dirac tal que $\text{supp}(\widehat{u_j})$ son compactos.

Para cada j en \mathbb{N} , aplicando el lema de división de Wiener, encontramos $q_j \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

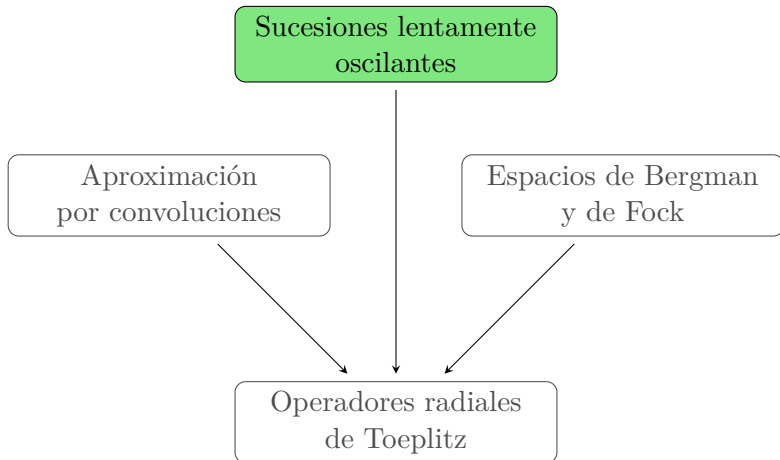
$$u_j = k * q_j.$$

Entonces

$$f * u_j = f * k * q_j = k * (f * q_j) \in \{k * g : g \in L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Por otro lado,

$$\|f * u_j - f\|_\infty \rightarrow 0.$$



Sucesiones log-oscilantes (Robert Schmidt, 1924)

LO := sucesiones acotadas $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ tales que

$$\lim_{\substack{m+1 \rightarrow 1 \\ n+1}} |x_m - x_n| = 0.$$

Distancia logarítmica:

$$\rho_{\log}(m, n) := |\log(m+1) - \log(n+1)|,$$

Módulo de continuidad de una sucesión x respecto a ρ_{\log} :

$$\omega_{\rho_{\log}, x}(\delta) := \sup\{|x_m - x_n| : m, n \in \mathbb{N}_0, \rho_{\log}(m, n) \leq \delta\},$$

LO es el conjunto de las funciones acotadas $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ que son uniformemente continuas respecto a la distancia logarítmica:

$$\text{LO} := \{x \in \ell^{\infty} : \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_{\rho_{\log}, x}(\delta) = 0\}.$$

Sucesiones log-oscilantes se obtienen de funciones acotadas uniformemente continuas

Proposición. LO es una C^* -subálgebra de ℓ^∞ .

Proposición. El operador $\Phi: C_u(\mathbb{R}) \rightarrow LO$,

$$(\Phi f)_n := f(\log(n+1)),$$

es un epimorfismo de álgebras C^* .

Idea para probar la propiedad suprayectiva:
dada una sucesión x en LO, poner

$$f(\log(n+1)) := x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

y aplicar la interpolación lineal entre los nodos $\log(n+1)$.

Sucesiones raíz-oscilantes

$\text{RO} :=$ el conjunto de las sucesiones acotadas que son uniformemente continuas respecto a la $\sqrt{\cdot}$ -métrica en \mathbb{N}_0 :

$$\rho_{\text{sqrt}}(m, n) := |\sqrt{m} - \sqrt{n}|.$$

Proposition. RO es una C^* -subálgebra de ℓ^∞ .

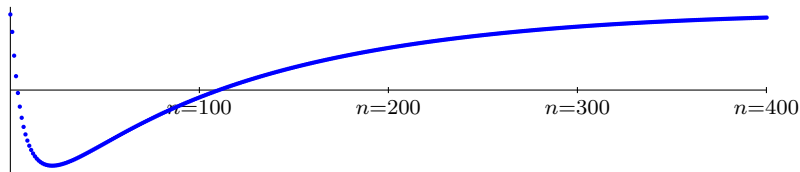
Proposición. El operador $\Psi: C_u(\mathbb{R}) \rightarrow \text{RO}$,

$$(\Psi f)_n := f(\sqrt{n}),$$

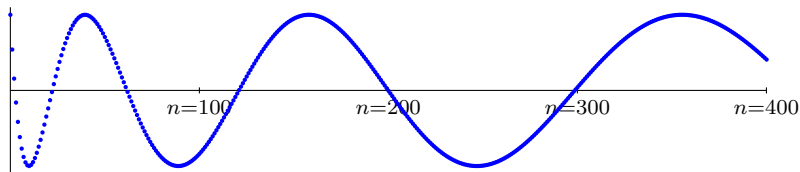
es un epimorfismo de álgebras C^* .

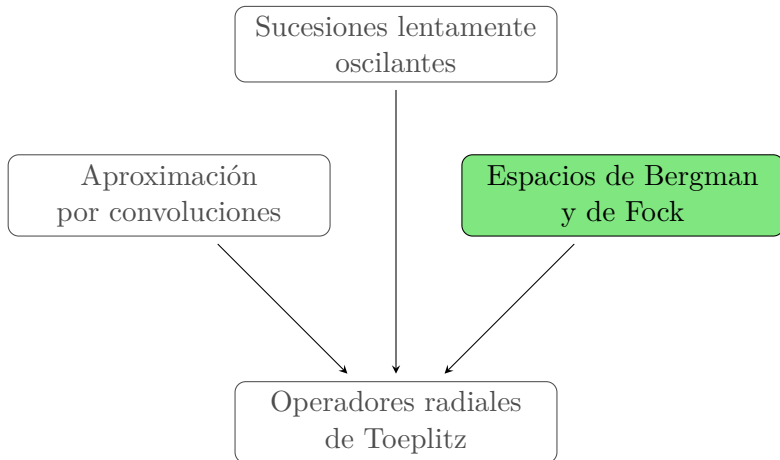
Ejemplos de sucesiones log-oscilantes y $\sqrt{\cdot}$ -oscilantes

$$x_n = \cos(\log(n + 1)):$$



$$x_n = \cos(\sqrt{n}):$$





Espacio de Bergman sobre el disco unitario: funciones holomorfas de cuadrado integrables

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

$$\mu_{\mathbb{D}} := \frac{1}{\pi} \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{D}.$$

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) := \{f \in H(\mathbb{D}) : f \in L^2(\mathbb{D})\}.$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} \, d\mu_{\mathbb{D}}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r e^{i\theta}) \overline{g(r e^{i\theta})} \, r \, dr.$$

Espacio de Bergman es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Los funcionales de evaluación son acotados:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|} \|f\|_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})} \quad (z \in \mathbb{D}, f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})).$$

Cualquier sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ converge uniformemente en compactos.

Por eso $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es completo.

Por el teorema de Riesz–Fréchet, para cada z en \mathbb{D} existe K_z en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ tal que

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle \quad (f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})).$$

Base ortonormal canónica en el espacio de Bergman

$$\varphi_n(z) = \sqrt{n+1} z^n.$$

Verifiquemos que la sucesión $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ es ortonormal:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \varphi_m(z) \overline{\varphi_n(z)} d\mu_{\mathbb{D}}(z) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(m-n)i\theta} d\theta \right) \\ &\quad \times \left(\sqrt{m+1} \sqrt{n+1} \int_0^1 r^{m+n} 2r dr \right) \\ &= \delta_{n,m} (n+1) \int_0^1 r^{2n} 2r dr \\ &= \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Núcleo reproductor y proyección de Bergman

Fórmula explícita para K_z :

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi_n(z)} \varphi_n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\bar{z}w)^n = \frac{1}{(1 - \bar{z}w)^2}.$$

$P_{\mathbb{D}}$:= la proyección ortogonal $L^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

$$(P_{\mathbb{D}}f)(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Espacio de Bargmann–Segal–Fock

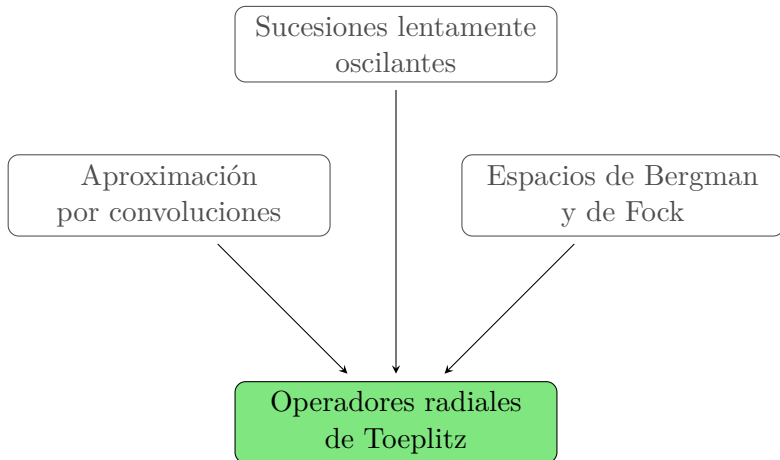
Medida gaussiana $d\gamma(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} d\mu(z)$.

$\mathcal{A}^2(\mathbb{C}, d\gamma) := \{f \in H(\mathbb{C}) : f \in L^2(\mathbb{C}, d\gamma)\}$.

$P_{\mathbb{C}} :=$ proyección ortogonal $L^2(\mathbb{C}, d\gamma) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{C}, d\gamma)$.

Base ortonormal en $\mathcal{A}^2(\mathbb{C}, d\gamma)$:

$$\psi_n(z) := \frac{z^n}{\sqrt{n!}}.$$



Operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman

Dada $g \in L^\infty(\mathbb{D})$, denotemos por T_g al operador de Toeplitz:

$$T_g: \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{D}), \quad T_g f := P_{\mathbb{D}}(gf).$$

En forma más explícita,

$$(T_g f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)f(w) d\mu_{\mathbb{D}}}{(1 - z\bar{w})^2}.$$

Operadores radiales de Toeplitz en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$

Dada $a \in L^\infty([0, 1])$, denotemos por \tilde{a} su extensión a \mathbb{D} :

$$g(z) := \tilde{a}(z) := a(|z|) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Resulta que T_g es diagonal respecto a la base canónica:

$$T_g \varphi_n = \lambda_a(n) \varphi_n,$$

donde

$$\lambda_a(n) = (n + 1) \int_0^1 a(\sqrt{r}) r^n dr.$$

Korenblum, Zhu (1995) <http://www.mathjournals.org/jot/1995-033-002/1995-033-002-010.html>

Operadores radiales de Toeplitz como matrices

Si $g = \tilde{a}(z) := a(|z|)$, entonces

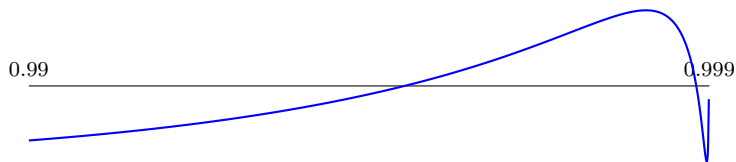
$$\langle T_g \varphi_n, \varphi_m \rangle = \lambda_n(a) \delta_{m,n}.$$

La matriz del operador T_g en la base $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ es diagonal:

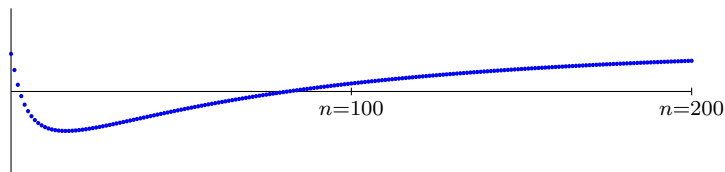
$$\begin{bmatrix} \lambda_0(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1(a) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_2(a) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3(a) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4(a) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ejemplo de sucesión de valores propios de un operador de Toeplitz radial en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$

$a(r) = \cos(\log(-2\log(r)))$ oscila rápidamente cerca de $r = 1$.



$\lambda_a(n) = \operatorname{Re}(\Gamma(1 - i) \exp(i \log(n + 1)))$.



Operadores radiales de Toeplitz y sucesiones de sus valores propios

$$T_a \longleftrightarrow \lambda_a$$

$$\{T_a : a \in L^\infty([0, 1])\} \longleftrightarrow \Lambda := \{\lambda_a : a \in L^\infty([0, 1])\}$$

$$C^* \text{-alg}\{T_a : a \in L^\infty(0, 1)\} \longleftrightarrow C^* \text{-alg}(\Lambda)$$

Operadores radiales de Toeplitz y sucesiones de sus valores propios

$$T_a \longleftrightarrow \lambda_a$$

$$\{T_a : a \in L^\infty([0, 1])\} \longleftrightarrow \Lambda := \{\lambda_a : a \in L^\infty([0, 1])\}$$

$$C^* \text{-alg}\{T_a : a \in L^\infty(0, 1)\} \longleftrightarrow C^* \text{-alg}(\Lambda)$$

Preguntas naturales:

¿Cuál es la cerradura del espacio Λ ?

¿Cuál es la C^* -álgebra generada por Λ ?

Operadores radiales de Toeplitz y sucesiones de sus valores propios

$$T_a \longleftrightarrow \lambda_a$$

$$\{T_a : a \in L^\infty([0, 1])\} \longleftrightarrow \Lambda := \{\lambda_a : a \in L^\infty([0, 1])\}$$

$$C^* \text{-alg}\{T_a : a \in L^\infty(0, 1)\} \longleftrightarrow C^* \text{-alg}(\Lambda)$$

Preguntas naturales:

¿Cuál es la cerradura del espacio Λ ?

¿Cuál es la C^* -álgebra generada por Λ ?

Las dos preguntas tienen la misma respuesta: LO.

Idea clave: sucesiones espectrales como convoluciones

$$\lambda_a(n) = (n + 1) \int_0^1 a(\sqrt{r}) r^n dr.$$

Cambio de variables:

$$n + 1 = \exp(x), \quad r = \exp(-\exp(-y)).$$

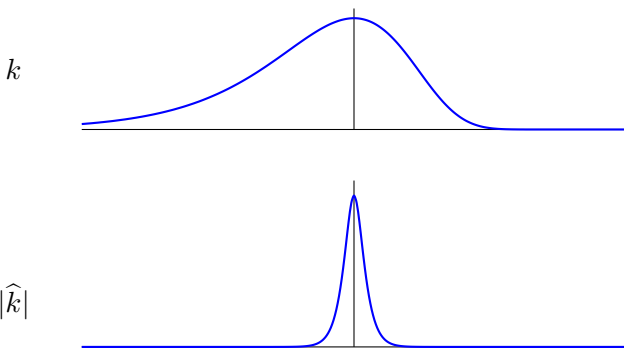
$$\lambda_a(n) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{a(\exp(-\exp(-y)/2))}_{b(y)} k(x - y) dy = (k * b)(x),$$

donde

$$k(x) = \frac{e^x}{e^{e^x}}.$$

Verificamos la condición de Wiener

$$k(x) = \frac{e^x}{e^{e^x}}, \quad \widehat{k}(t) = \Gamma(1 - 2i\pi t) \neq 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$



Resultado principal, para el espacio de Bergman

Teorema. $\underbrace{\{\lambda_a : a \in L^\infty([0, 1])\}}_{\Lambda}$ es subconjunto denso de LO.

Por consecuencia, $C^*(\Lambda) = \text{LO}$, y

C^* -alg(operadores radiales de Toeplitz en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$) \simeq LO.

Resultado principal, para el espacio de Bergman

Teorema. $\underbrace{\{\lambda_a : a \in L^\infty([0, 1])\}}_{\Lambda}$ es subconjunto denso de LO.

Por consecuencia, $C^*(\Lambda) = \text{LO}$, y
 C^* -alg(operadores radiales de Toeplitz en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$) \simeq LO.

Suárez (2008) doi:10.1112/blms/bdn042

Grudsky, M, Vasilevski (2013) euclid.cma/1356039033

Bauer, Herrera Yañez, Vasilevski (2014)

doi:10.1007/s00020-013-2101-1

Herrera Yañez, M, Vasilevski (2015)

doi:10.1007/s00020-014-2213-2

Operadores radiales de Toeplitz en el espacio de Fock

Dada a en $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, denotamos por \tilde{a} su extensión a \mathbb{C} :

$$g(z) := \tilde{a}(z) := a(|z|) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

T_g es diagonal respecto a la base canónica en $\mathcal{A}^2(\mathbb{C}, d\gamma)$:

$$T_g \psi_n = \xi_a(n) \psi_n,$$

donde

$$\xi_a(n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{\mathbb{R}_+} a(\sqrt{r}) e^{-r} r^n dr.$$

Grudsky, Vasilevski (2002) doi:10.1007/BF01197858

Idea clave: aproximar las sucesiones de valores propios por convoluciones

Hemos demostrado que

$$\xi_a(n) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2(\sqrt{n}-y)^2} a(y) dy \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Sea a_{ext} la función a extendida con cero de \mathbb{R}_+ a \mathbb{R} . Entonces

$$\xi_a(n) \approx (k * a_{\text{ext}})(\sqrt{n}) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde k es la función gaussiana:

$$k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}.$$

La transformada de Fourier de k no se anula:

$$\widehat{k}(t) = e^{-\frac{1}{2}\pi^2 t^2}.$$

Resultado principal, para el caso de Fock

Teorema. $\{\xi_a: a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)\}$ es un subconjunto denso de \mathcal{RO} .

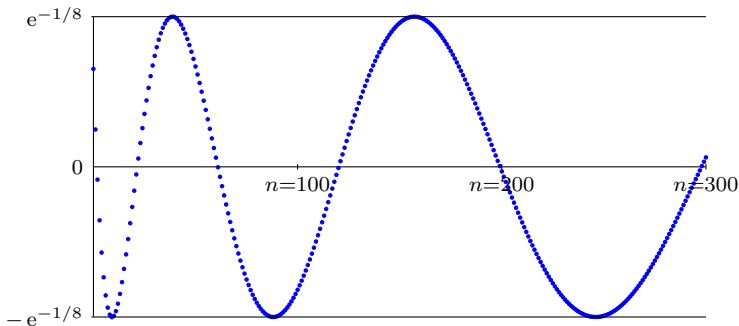
Como consecuencia, el álgebra C^* generada por los operadores radiales de Toeplitz en el espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{C}, d\gamma)$ es isométricamente isomorfa a \mathcal{RO} .

Esmeral, Maximenko (2016) doi:10.1007/s11785-016-0557-0

Ejemplo: la sucesión de los valores propios de un operador radial de Toeplitz en el espacio de Fock

Sean $a(r) = \cos(r)$, $r \in \mathbb{R}_+$. Entonces

$$\xi_a(n) = {}_1F_1(1+n; 1/2; 1/4) \approx e^{-1/8} \cos(\sqrt{n}) + o(1).$$



Resumen

Álgebra C^* generada por
operadores radiales de Toeplitz
en el espacio de Bergman



Sucesiones
log-oscilantes

Álgebra C^* generada por
operadores radiales de Toeplitz
en el espacio de Fock



Sucesiones
 $\sqrt{\cdot}$ -oscilantes