Unicidad de la factorización LU

Objetivos. Demostrar que si una matriz cuadrada posee una factorización LU, entonces esta factorización es única.

Requisitos. Definición del producto de matrices, definición de matrices triangulares superiores e inferiores, producto de matrices triangulares, inversa de una matriz triangular.

Notación: matrices triangulares y diagonales.
En el conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de las matrices reales cuadradas de orden n consideramos los siguientes subconjuntos:

$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) :=$ las matrices triangulares superiores;

$\mathrm{UT}_n(\mathbb{R}) :=$ las matrices triangulares superiores invertibles;

$\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R}) :=$ las matrices triangulares inferiores;

$\mathrm{LT}_n(\mathbb{R}) :=$ las matrices triangulares inferiores invertibles;

$\mathfrak{diag}_n(\mathbb{R}) :=$ las matrices diagonales.

Notación: matriz identidad.
Denotemos por I_n a la matriz identidad de orden n:

$$I_n = \big(\delta_{i,j}\big)_{i,j=1}^n.$$

1. Definición de las matrices triangulares y diagonales.

$$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) = \Big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\colon\ A_{i,j} = 0 \text{ para todos } i,j \in \{1,\ldots,n\} \text{ tales que } \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\Big\},$$

$$\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R}) = \Big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\colon\ A_{i,j} = 0 \text{ para todos } i,j \in \{1,\ldots,n\} \text{ tales que } \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\Big\},$$

$$\mathfrak{diag}_n(\mathbb{R}) = \Big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\colon\ A_{i,j} = 0 \text{ para todos } i,j \in \{1,\ldots,n\} \text{ tales que } \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}\Big\}.$$

2. ¿Cuándo una matriz es triangular superior y al mismo tiempo triangular inferior?.

$$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R}) = \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}$$

3. ¿Cuál matriz diagonal tiene las entradas diagonales iguales a uno?.
Sea $A \in \mathfrak{diag}_n(\mathbb{R})$ y sea $A_{i,i} = 1$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces

$$A =$$

Producto de matrices triangulares (repaso)

4. Producto de matrices triangulares superiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$AB \in$$

5. Producto de matrices triangulares inferiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$AB \in$$

6. Entradas diagonales del producto de matrices triangulares superiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(AB)_{i,i} =$$

7. Entradas diagonales del producto de matrices triangulares inferiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(AB)_{i,i} =$$

Inversa de una matriz triangular (repaso)

8. Criterio de que una matriz triangular es invertible.
Sea A una matriz triangular, esto es $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ o $A \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$. Entonces:

$$A \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

9. Inversa de una matriz triangular superior.
Sea $A \in \mathrm{UT}_n(\mathbb{R})$, es decir A es triangular superior e invertible. Entonces

$$A^{-1} \in$$

10. Elementos diagonales de la inversa de una matriz triangular superior.
Sea $A \in \mathrm{UT}_n(\mathbb{R})$. Entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(A^{-1})_{i,i} =$$

11. Inversa de una matriz triangular inferior.
Sea $A \in \mathrm{LT}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$A^{-1} \in$$

12. Elementos diagonales de la inversa de una matriz triangular inferior.
Sea $A \in \mathrm{LT}_n(\mathbb{R})$. Entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(A^{-1})_{i,i} =$$

Factorización LU y su unicidad

13. Definición de la factorización LU.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible y sea (L, U) un par ordenado de matrices de clase $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que el par ordenado (L, U) es un *factorización LU* de la matriz A si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $A = LU$
2. la matriz U es ...
3. la matriz L es ...
4. las entradas diagonales de la matriz L son ...

14. Factorización LU no siempre existe. Muestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es invertible. Muestre que no existen matrices

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad U = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,1} \end{bmatrix}$$

tales que $LU = A$.

15. Unicidad de la factorización LU. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible y sean (L_1, U_1) y (L_2, U_2) factorizaciones LU de la matriz A. Demuestre que $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.