Solución de sistemas triangulares de ecuaciones lineales

Estos apuntes están escritos por Maria de los Angeles Isidro Pérez y Egor Maximenko.

Objetivos. Resolver sistemas determinados de ecuaciones lineales con matrices triangulares. Practicar el método de la sustitución hacia adelante para resolver sistemas triangulares inferiores y el método de la sustitución hacia atrás para sistemas triangulares superiores.

Requisitos. Matrices triangulares, notación breve para las sumas.

1. Ejemplo. Resolver el siguiente sistema triangular inferior de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & & & = & -2; \\ -3x_1 & + & x_2 & & & = & 7; \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 11. \end{array}\right.$$

Solución. De la primera ecuación despejamos x_1, luego de la segunda ecuación despejamos x_2 y sustituimos el valor de x_1, etc.:

$$\begin{aligned} &x_1 = -2/2 = -1; \\ &x_2 = 7 + 3x_1 = 7 + 3 \cdot (-1) = 4; \\ &x_3 = (11 - x_1 - 4x_2)/(-2) = (11 + 1 - 16)/(-2) = -4/(-2) = 2. \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0+0 \\ 3+4+0 \\ -1+16-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark \qquad \square$$

2. Ejercicio. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales y haga la comprobación:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & & & = & -3; \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & = & -5; \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 9. \end{array}\right.$$

3. Ejemplo. Resolver el siguiente sistema triangular superior de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 2; \\ & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -9; \\ & & & & 4x_3 & + & x_4 & = & -3; \\ & & & & & - & 3x_4 & = & 9. \end{array}\right.$$

Solución. De la cuarta ecuación despejamos x_4, luego de la tercera despejamos x_3 sustituyendo el valor de x_4, etc.:

$$\begin{aligned} &x_4 = 9/(-3) = -3; \\ &x_3 = (-3 - x_4)/4 = 0/4 = 0; \\ &x_2 = (-9 - 5x_3 - 2x_4)/(-1) = -3/(-1) = 3; \\ &x_1 = (2 + x_2 - 3x_3 + 3x_4)/2 = -4/2 = -2. \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-3+0+9 \\ 0-3+0-6 \\ 0+0+0-3 \\ 0+0+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark \qquad \square$$

4. Ejercicio. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales y haga la comprobación:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -3; \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 8; \\ & & & - & 3x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

Notación breve para las sumas

5. Ejemplos.

$$\sum_{k=2}^{5} a_k = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ 2\le k\le 5}} a_k = a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$\sum_{i=3}^{4} c_i d_i = \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}:\\ 3\le i\le 4}} c_i d_i = c_3 d_3 + c_4 d_4,$$

$$\sum_{k=1}^{0} b_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}:\ 1\le k\le 0} b_k = \sum_{k\in\emptyset} b_k = 0.$$

Por definición, la suma de un conjunto vacío de sumandos es cero.

6. Ejercicio. Escriba las siguientes sumas usando el símbolo $\sum$:

$$c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = \sum_{i=}$$

$$a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = \sum$$

$$b_1 c_2 + b_2 c_3 + b_3 c_4 + b_4 c_5 = \sum$$

Deducción de las fórmulas generales

7. Fórmulas de la sustitución hacia adelante, $n = 4$. Consideremos un sistema triangular inferior de ecuaciones lineales (las entradas diagonales $L_{i,i}$ son no nulas):

$$\begin{cases} L_{1,1}x_1 & & & & = & b_1; \\ L_{2,1}x_1 & + \quad L_{2,2}x_2 & & & = & b_2; \\ L_{3,1}x_1 & + \quad L_{3,2}x_2 & + \quad L_{3,3}x_3 & & = & b_3; \\ L_{4,1}x_1 & + \quad L_{4,2}x_2 & + \quad L_{4,3}x_3 & + \quad L_{4,4}x_4 & = & b_4. \end{cases}$$

De la primera ecuación despeje la incógnita x_1, de la segunda ecuación despeje la incógnita x_2 (exprésela a través de x_1), etc.:

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$x_3 =$$

$$x_4 =$$

8. Fórmula general de la sustitución hacia adelante. Generalizando las fórmulas del ejercicio anterior, escriba una fórmula general para x_i:

$$x_i = \qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

9. Fórmulas de la sustitución hacia atrás, $n = 4$. Consideremos un sistema triangular superior de ecuaciones lineales (las entradas diagonales $A_{i,i}$ son no nulas):

$$\begin{cases} U_{1,1}x_1 + U_{1,2}x_2 + U_{1,3}x_3 + U_{1,4}x_4 = b_1; \\ \qquad\quad\; U_{2,2}x_2 + U_{2,3}x_3 + U_{2,4}x_4 = b_2; \\ \qquad\qquad\qquad\;\; U_{3,3}x_3 + U_{3,4}x_4 = b_3; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad U_{4,4}x_4 = b_4. \end{cases}$$

De la última ecuación despeje la incógnita x_4, de la penúltima despeje la incógnita x_3 (exprésela a través de x_4), etc.:

$x_4 =$

$x_3 =$

$x_2 =$

$x_1 =$

10. Fórmula general de la sustitución hacia atrás. Generalizando las fórmulas del ejercicio anterior, escriba una fórmula general para x_i:

$x_i = \qquad\qquad\qquad\qquad (i = n, n-1, \ldots, 1).$

Número de operaciones

Primero recuerde las siguientes fórmulas:

11. Fórmula para la suma de una sucesión constante.

$$\sum_{i=1}^{n} c =$$

12. Fórmula para la suma de una progresión aritmética.

$$\sum_{i=1}^{n} i =$$

13. Calcular el número de las operaciones de multiplicación y división en el algoritmo de la sustitución hacia atrás, si el orden de la matriz es n.

Solución. Para calcular la expresión

$$\sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j,$$

se usan $n - i$ operaciones de multiplicación. Luego para calcular x_i hay que dividir entre $A_{i,i}$. Por lo tanto, el número de multiplicaciones y divisiones para calcular x_i es

$$n - i + 1.$$

El número total de las multiplicaciones y divisiones es

$$\sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) = \sum_{i=1}^{n} (n + 1) - \sum_{i=1}^{n} i = \ldots$$

Usando fórmulas calcule las sumas y escriba la respuesta final. $\square$

14. Calcule el número de las multiplicaciones y divisiones en el algoritmo de la sustitución hacia adelante.

15. Calcule el número de las adiciones y sustracciones en el algoritmo de la sustitución hacia adelante.