Sobre las inversas de las matrices triangulares

Objetivos. Demostrar que si una matriz triangular inferior es invertible, entonces su inversa también es triangular inferior. De manera similar, si una matriz triangular superior es invertible, entonces su inversa también es triangular superior.

Aplicaciones. Este resultado se usa para demostrar que las matrices triangulares inferiores invertibles (o las matrices triangulares superiores invertibles) forman un grupo. También lo usamos para demostrar algunas propiedades de la factorización LU.

Requisitos. Matrices triangulares, definición de invertibilidad, matrices elementales, cofactores.

Vamos a considerar el caso de matrices triangulares inferiores. El caso de matrices triangulares superiores se deja como un ejercicio.

1. Definición de matrices triangulares inferiores (repaso). Denotamos por $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices triangulares inferiores $n \times n$ con entradas reales:

$$\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R}) := \{L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \colon \quad \forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \quad (j < k) \quad \Longrightarrow \quad L_{j,k} = 0\}.$$

2. Otra forma de la definición (repaso).

$$\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R}) = \{L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \colon \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \quad \forall k \in \{j+1, \ldots, n\} \quad L_{j,k} = 0\}.$$

3. Criterio de invertibilidad de matrices triangulares inferiores (repaso). Sea $L \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$. Entonces L es invertible $\Longleftrightarrow$ todas las entradas diagonales de L son distintas de cero, esto es,

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad L_{j,j} \neq 0.$$

4. Teorema (sobre la inversa de una matriz triangular inferior invertible). Sea $A \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$. Supongamos que A es invertible. Entonces $A^{-1} \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$.

5. Hay varios caminos naturales para demostrar el Teorema 4. En este texto se consideran los siguientes métodos:

- Analizar las entradas de la matriz inversa.
- Representar la matriz inversa como un producto de matrices elementales.
- Analizar las entradas de la matriz adjunta clásica (la matriz de cofactores transpuesta).

Análisis de las entradas de la matriz inversa

Demostración del Teorema 4. Sea B la matriz inversa de A, esto es, $AB = I_n$ y $BA = I_n$. Utilicemos la igualdad $AB = I_n$.

Separamos la demostración en $n-1$ pasos: $p = 1, \ldots, n-1$. En el p-ésimo paso vamos a demostrar que para cada $q \in \{p+1, \ldots, n\}$ se tiene $B_{p,q} = 0$. Estamos suponiendo que ya hicimos los pasos anteriores y hemos demostrado que

$$\forall j \in \{1, \ldots, p-1\} \quad \forall q \in \{j+1, \ldots, n\} \quad B_{j,q} = 0. \tag{1}$$

Sabemos que $(AB)_{p,q} = (I_n)_{p,q} = \delta_{p,q} = 0$. Por otro lado, por definición del producto de matrices,

$$(AB)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k} B_{k,q} = \sum_{k=1}^{p-1} A_{p,k} \underbrace{B_{k,q}}_{0} + A_{p,p} B_{p,q} + \sum_{k=p+1}^{n} A_{p,k} B_{k,q}.$$

En la suma con $k \le p-1$ tenemos $q > k$; la suposición (1) implica que $B_{k,q} = 0$. En la suma con $k > q$ tenemos $k \ge p+1$ y $A_{p,k} = 0$ por la definición de matriz triangular inferior. Esto significa que $A_{p,p} B_{p,q} = 0$. Pero $A_{p,p} \ne 0$ por el Criterio 3. Concluimos que $B_{p,q} = 0$. $\square$

La misma idea se puede escribir de otra manera realizando la inducción matemática sobre n y partiendo A y B en bloques.

Demostración con matrices elementales

Idea de demostración del Teorema 4 usando matrices elementales. Para convertir A en la matriz identidad, es suficiente aplicar operaciones elementales de los siguientes dos tipos:

- Multiplicar un renglón por un escalar no nulo.
- A un renglón q sumar un múltiplo de un renglón p, con $q > p$.

Estas operaciones elementales corresponden a la multiplicación del lado izquierdo por ciertas matrices elementales $E_m, \ldots, E_1$ triangulares inferiores. De la igualdad

$$E_m \cdots E_1 A = I_n$$

concluimos que $B = E_m \cdots E_1$. Como las matrices $E_m, \ldots, E_1$ son triangulares inferiores, su producto B también tiene esta propiedad. $\square$

Demostración con cofactores

Se sabe que si una matriz A es invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A),$$

donde $\operatorname{adj}(A)$ es la matriz adjunta clásica de A. La entrada (p, q) de la matriz $\operatorname{adj}(A)$ se calcula como el cofactor (q, p) de la matriz A, es decir, como $(-1)^{p+q}$ por el determinante de la submatriz de A ubicada en los renglones $\{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$ y las columnas $\{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}$.

Idea de demostración del Teorema 4 usando cofactores. Sea $p < q$. Consideremos la submatriz $S = A(\{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}, \{1, \ldots, n\} \setminus \{p\})$. Se puede demostrar que esta matriz es triangular inferior, y $S_{q,q} = 0$. Por lo tanto, $\det(S) = 0$. □