Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante α.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

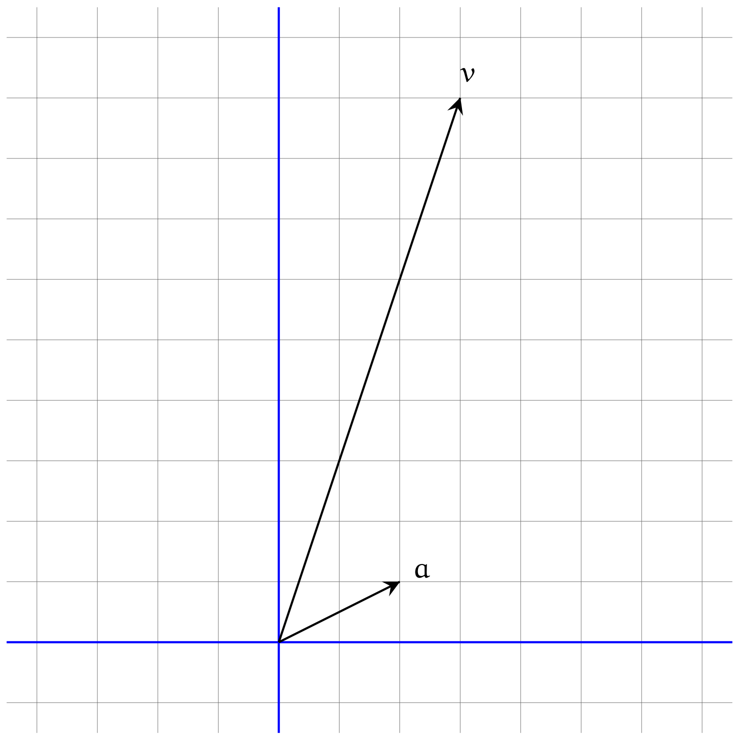
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{3}, \qquad b_2 = \frac{a_2 + 4b_1}{8}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 6b_1 - 9b_2}{2}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 19 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & -8 & 19 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -15 \\ 13 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & -15 \\ 1 & -6 & 13 \\ -3 & 4 & -19 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante β.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -11 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

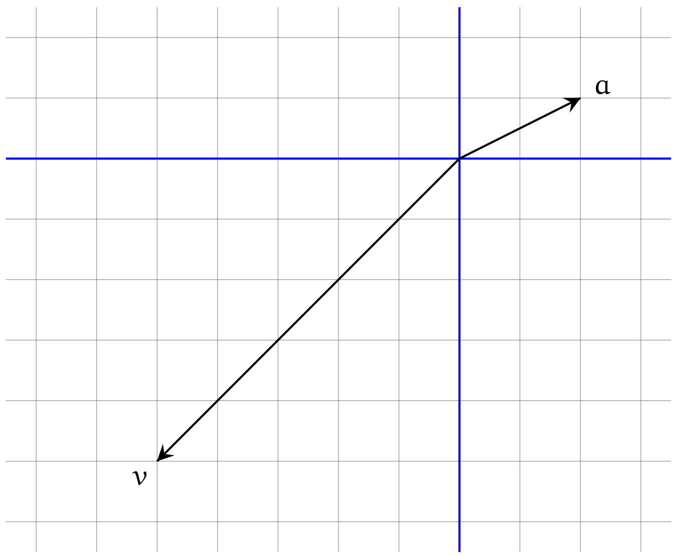
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{8}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 3b_1}{2}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + 9b_1 - 9b_2}{5}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 7 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 17 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante α.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

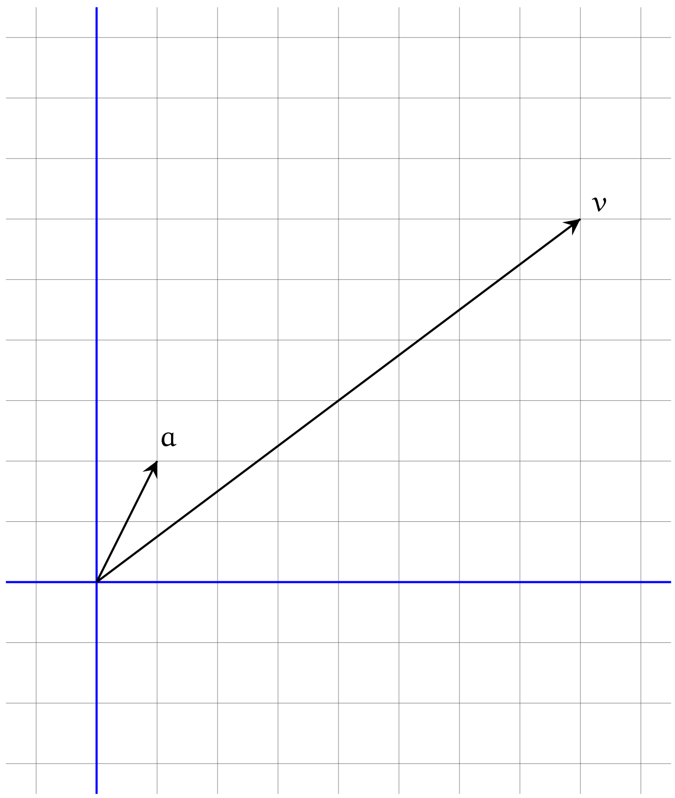
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| \, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| \, e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| \, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| \, e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{9}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 3b_1}{7}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 5b_1 + 6b_2}{8}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -17 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & -17 \\ 4 & 3 & -15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ -4 \\ -6 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 20 \\ 3 & 4 & -4 \\ 5 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 14 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante β.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

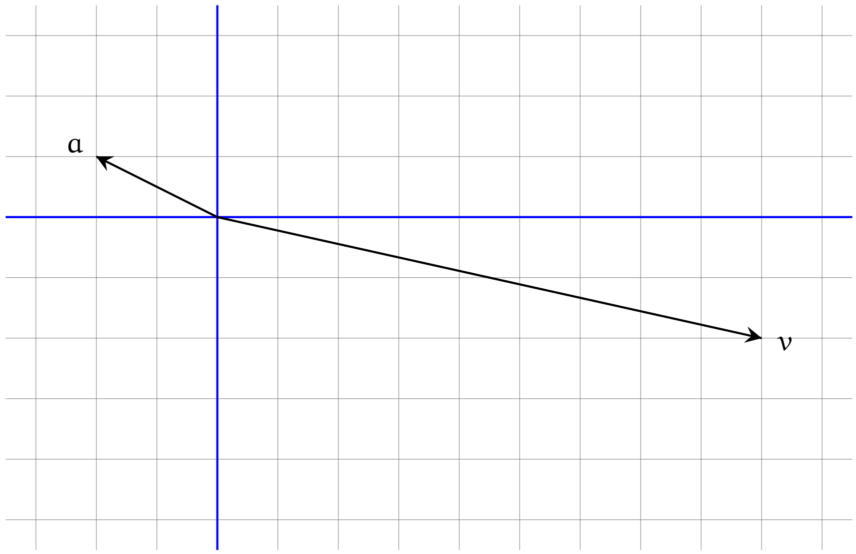
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{6}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 2b_1}{3}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + 9b_1 - b_2}{5}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \\ -5 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 4 & 5 & 17 \\ 2 & 6 & -5 \\ -5 & -1 & -30 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -5 & -6 & -12 \\ 1 & -4 & -18 \\ 1 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante 1 DVF.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

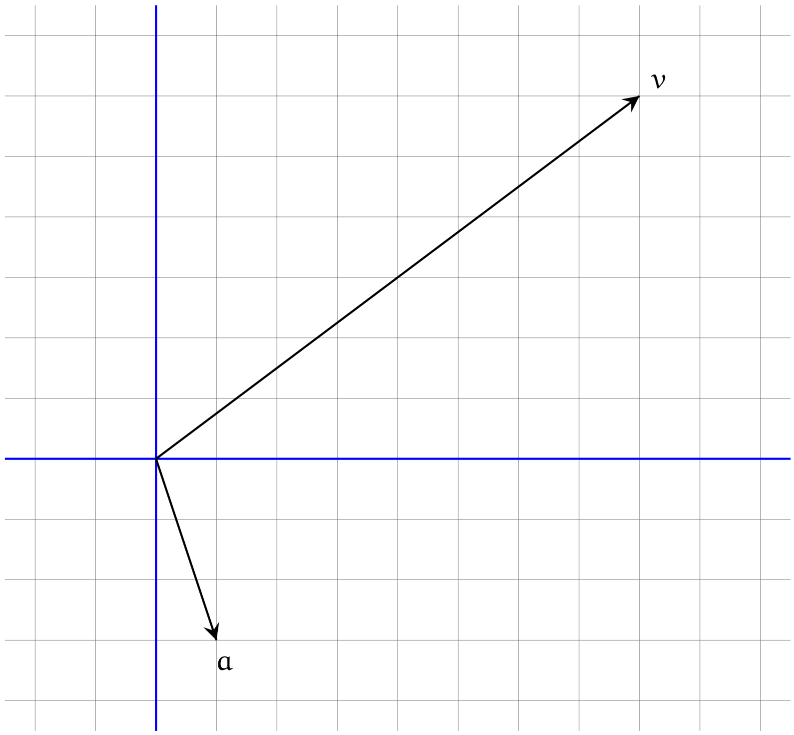
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{7}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 3b_1}{4}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + 2b_1 + 8b_2}{9}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ -8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 20 \\ 2 & 0 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 23 \\ 3 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 3 & 2 & 23 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & 8 & -13 \end{bmatrix}.$$

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante 2 BOY.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

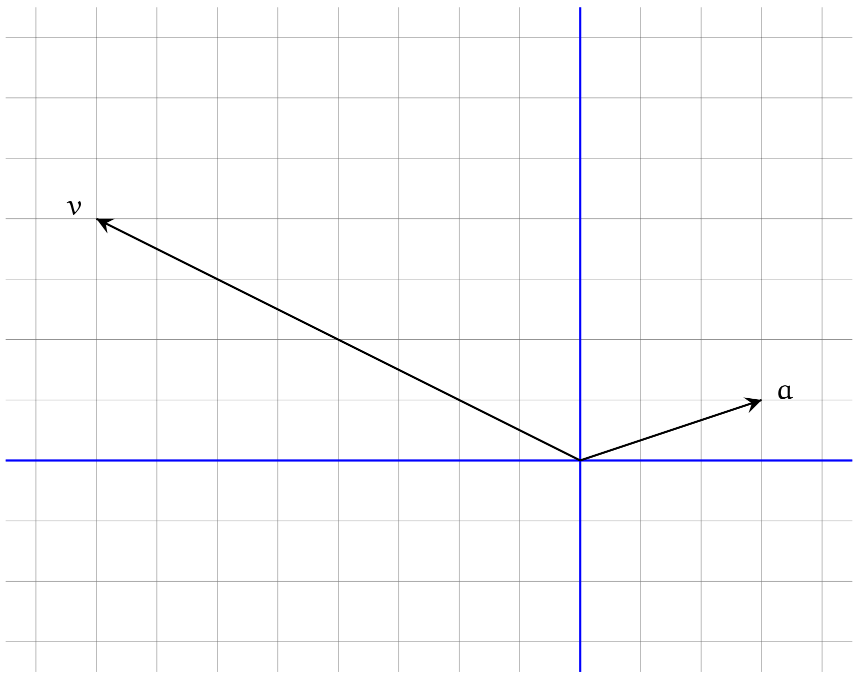
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{7}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 6b_1}{8}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 9b_1 + 4b_2}{3}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 30 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 10 \\ 5 & 7 & 30 \\ -2 & -6 & -19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -16 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 1 & 6 & -16 \\ 5 & 4 & -12 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante 3 DMNF.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

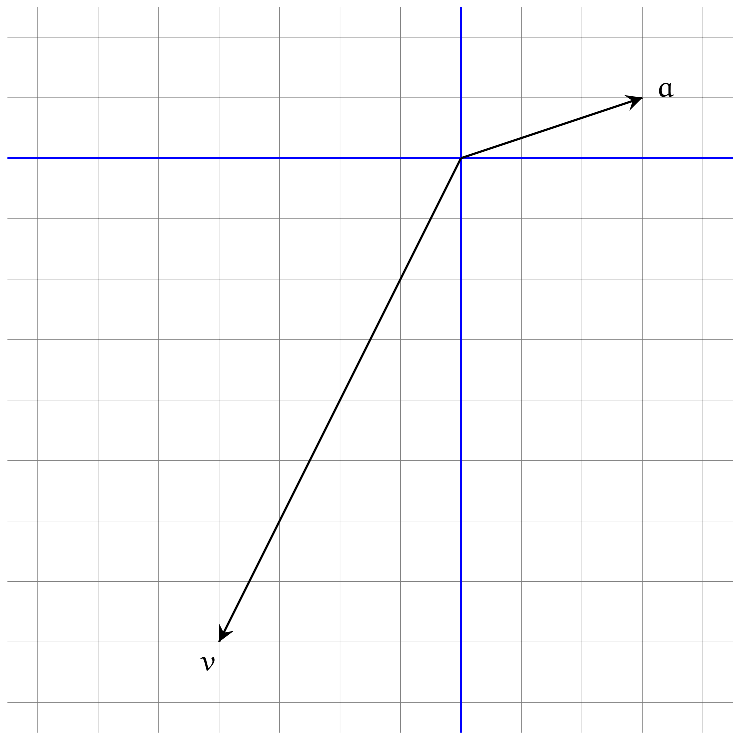
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{7}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 2b_1}{9}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 6b_1 + 8b_2}{4}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ 7 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & 21 \\ 4 & -3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -18 \\ -12 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -18 \\ 3 & 4 & -12 \\ 5 & 6 & -6 \\ 1 & -2 & 12 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante 4 GGM.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

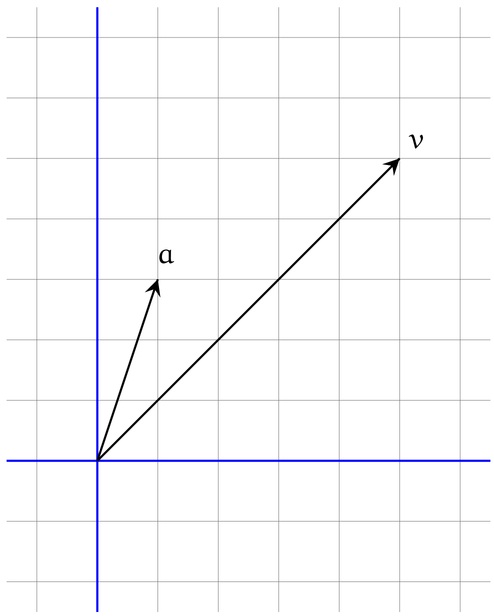
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{8}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 9b_1}{2}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + b_1 - 6b_2}{3}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ 14 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -13 \\ -2 & -4 & 14 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 23 \\ -13 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 23 \\ -1 & 2 & -13 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante 5 BOS.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

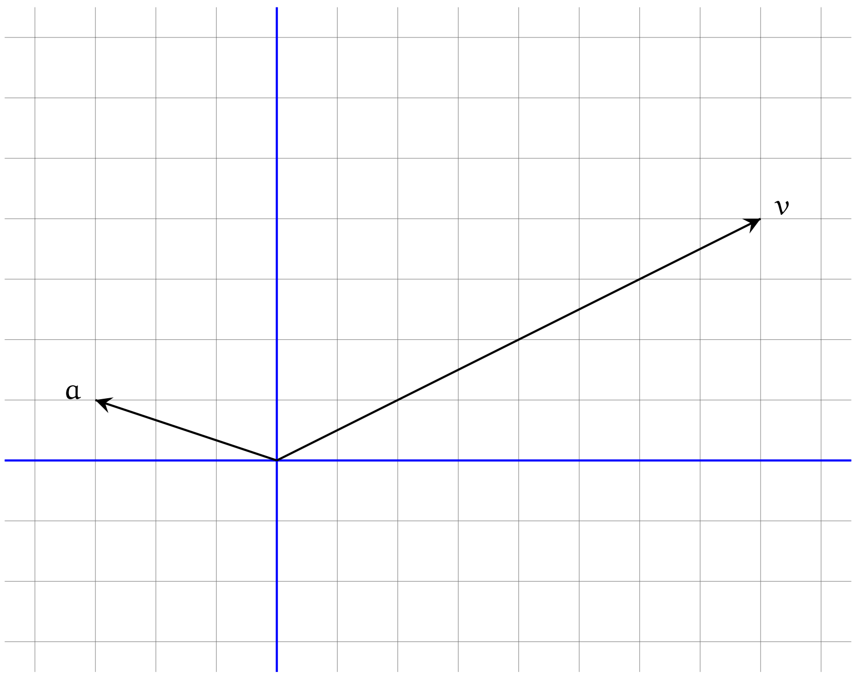
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{4}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 8b_1}{6}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 9b_1 + 8b_2}{3}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -15 \\ -7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ -18 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 18 \\ 1 & -6 & 0 \\ -3 & 2 & -18 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante 6 OAAC.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

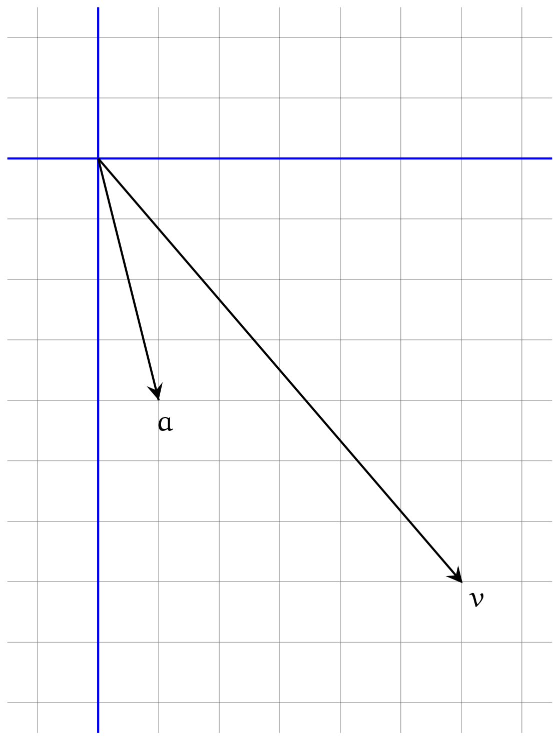
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{9}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 2b_1}{6}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + 7b_1 - 5b_2}{3}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -18 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -5 & -7 & -18 \\ -2 & 3 & 15 \\ 2 & 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -16 \\ 10 \\ -16 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -16 \\ -1 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & -16 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante 7 LCAL.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

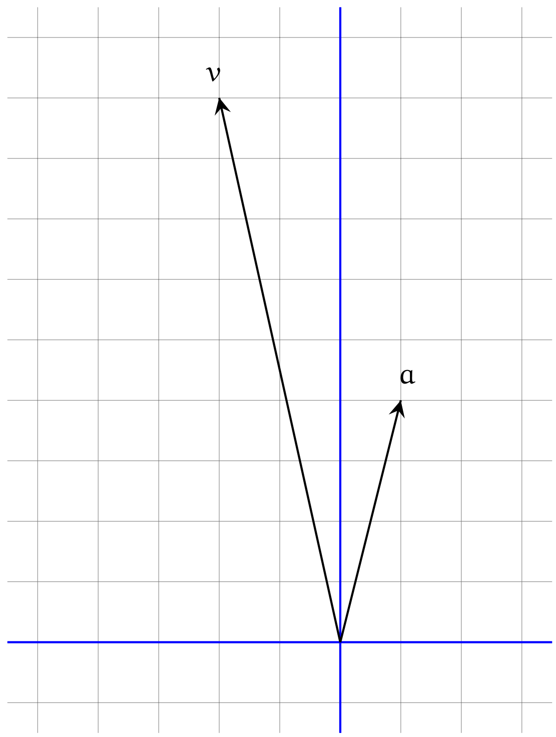
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{7}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 4b_1}{8}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + 3b_1 + b_2}{6}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -16 \\ 1 \\ 14 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -16 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -9 & 14 \\ -5 & 1 & 24 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ -12 \\ -2 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 10 \\ 1 & -4 & -12 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & -16 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 3. Variante 8.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *1 %.*
Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiple positivo del vector básico e_1:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1, \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

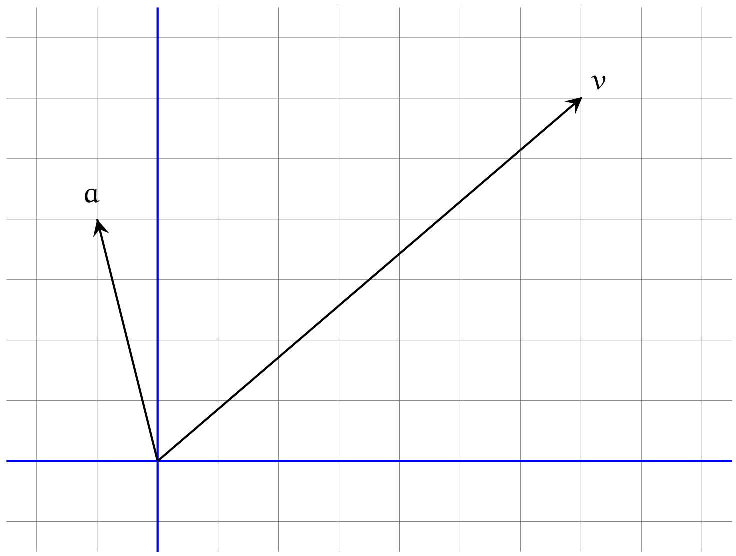
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *1 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{6}, \qquad b_2 = \frac{a_2 + 8b_1}{3}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 5b_1 - 2b_2}{7}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ -14 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 14 \\ 2 & 3 & 14 \\ -5 & 7 & -14 \\ -2 & -2 & -21 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *2 %.*
Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -13 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 8 & -7 \\ 1 & 0 & -13 \\ 5 & -2 & -31 \end{bmatrix}.$$