Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante α.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{3,*}B$ y $AB_{*,1}$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & -6 & -7 \\ -1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & -4 & 7 \\ -7 & -1 & 6 & 4 \\ 7 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el segundo renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la primera columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 6 & -5 \\ -7 & -5 & -6 & -3 & -2 \\ 6 & 7 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & -4 \\ -5 & 5 & -1 \\ 7 & 3 & -7 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,5} \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,4} \in \mathcal{M}_{5\times4}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{5} \in \mathbb{R}^5$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_1 = ?, \quad (Ac)_2 = ?, \quad (AB)_{3,4} = ?, \quad (AB)_{5,1} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{14\times8}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{8\times13}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{13\times5}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{80}$, $v \in \mathbb{R}^{60}$, $W \in \mathcal{M}_{60\times70}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que

$$1A = A.$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times4}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{R})$ y sea $C \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$(AB)C = A(BC).$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que
$$1A = A.$$
Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r, s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y sea $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que
$$(AB)C = A(BC).$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que
$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.
$$d = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:
$$D_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$
$$D_3 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \\ -5 & -5 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 & 8 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \\ 10 & 10 & 6 & -10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 80 & 20 & 70 \\ 5 & 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 80 & 20 & 70 \\ 5 & 8 & -3 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 80 & 20 & 70 \\ 5 & 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 86 & 23 & 67 \\ 5 & 8 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 40 \\ 8 & -1 & 30 \\ 5 & 1 & 70 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 40 & 2 & 3 \\ 30 & -1 & 8 \\ 70 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 40 \\ 8 & -1 & 30 \\ 5 & 1 & 70 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 42 \\ 8 & -1 & 29 \\ 5 & 1 & 71 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 & -5 \\ 5 & -3 & -4 & 7 \\ 8 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & -8 & -7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 8 & 5 \\ -9 & 2 & 1 & -7 \\ 4 & 6 & -1 & 7 \\ -6 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} -4 & -7 & 3 & 6 \\ 5 & -8 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \\ -3 & -2 & -9 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 5 & -8 & -6 & 4 \\ -3 & -2 & -9 & -5 \\ -4 & -7 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -8 & -7 \\ -5 & 6 & 7 & -3 \\ 8 & -6 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -9 & 5 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -7 & -2 \\ -5 & 7 & -3 & 6 \\ 8 & 1 & 9 & -6 \\ 2 & -9 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto punto $a^\top b$ de dos vectores dados a y b. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren los renglones de A, y en el ciclo interior las columnas de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante β.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{1,*}B$ y $AB_{*,2}$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & 3 & -6 \\ -2 & -4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -4 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 7 \\ -5 & -3 & -1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el primer renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la segunda columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & -4 & -7 \\ -3 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{4,5} \in \mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,5} \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{5} \in \mathbb{R}^5$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_1 = ?, \quad (Ac)_3 = ?, \quad (AB)_{4,5} = ?, \quad (AB)_{2,1} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{7\times11}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{11\times5}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{5\times13}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{70}$, $v \in \mathbb{R}^{80}$, $W \in \mathcal{M}_{80\times60}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que
$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top.$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times4}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que
$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top.$$

Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r, s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.

$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:

$$D_1 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$D_3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & -3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & -8 & 3 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 80 & 40 & 60 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 & 41 & 58 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 80 & 40 & 60 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 40 & 60 \\ -6 & -10 & -16 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 70 \\ -2 & 5 & 30 \\ 1 & -6 & 80 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 76 \\ -2 & 5 & 24 \\ 1 & -6 & 83 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 9 & 70 \\ -2 & 5 & 30 \\ 1 & -6 & 80 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 70 \\ 5 & -2 & 30 \\ -6 & 1 & 80 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 3 & 6 \\ -4 & 8 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & -7 \\ -3 & 4 & -9 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 & 7 \\ 5 & -6 & -8 & 2 \\ 3 & -7 & -1 & 6 \\ -3 & 9 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 9 & -3 & -7 & 1 \\ 8 & -4 & -8 & 6 \\ 7 & -1 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & -9 \\ 8 & -4 & -8 & 6 \\ 7 & -1 & -6 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 & 7 \\ -6 & -4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & -7 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 8 & 7 \\ -4 & -8 & -6 & 1 \\ -9 & -7 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el vector $\alpha x + y$, donde los datos iniciales son un escalar α y dos vectores x, y. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren las columnas de A, y en el ciclo interior los renglones de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante 1 DVF.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -2 & -4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 14 & -10 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{1,*}B$ y $AB_{*,3}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & -5 & -4 \\ 7 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & -4 & -7 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 & 1 \\ -5 & -1 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el primer renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la segunda columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -7 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -3 & 7 \\ 4 & -4 & -3 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \\ 2 & -6 & 7 \\ 5 & 3 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{4,6} \in \mathcal{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{6,5} \in \mathcal{M}_{6\times 5}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{6} \in \mathbb{R}^6$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_4 = ?, \quad (Ac)_3 = ?, \quad (AB)_{2,3} = ?, \quad (AB)_{1,5} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{14\times 9}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{9\times 13}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{13\times 5}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{60}$, $v \in \mathbb{R}^{80}$, $W \in \mathcal{M}_{80\times 70}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y sean $B, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r, s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.

$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:

$$D_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_3 \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 & -4 \\ 5 & 5 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 & 8 \\ 5 & 5 & 3 & -1 \\ 12 & 9 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 2 & -12 & -8 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 70 & 20 & 50 \\ 6 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & 22 & 46 \\ 6 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 70 & 20 & 50 \\ 6 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 70 & 20 & 50 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 & 80 \\ 4 & 2 & 70 \\ 8 & 1 & 50 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 18 & -2 & 80 \\ -12 & 2 & 70 \\ -24 & 1 & 50 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -6 & -2 & 80 \\ 4 & 2 & 70 \\ 8 & 1 & 50 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 78 \\ 4 & 2 & 72 \\ 8 & 1 & 51 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ -7 & 9 & -1 & 0 \\ -2 & -9 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & -4 & 4 & -7 \\ 0 & 6 & -3 & -5 \\ 8 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & -9 \\ 7 & -2 & -6 & 4 \\ 9 & 2 & -7 & -3 \\ -5 & 5 & -8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & -9 \\ -5 & 5 & -8 & -4 \\ 7 & -2 & -6 & 4 \\ 9 & 2 & -7 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -5 & 8 \\ -7 & -8 & 9 & -1 \\ 6 & 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 3 & 2 \\ 8 & -6 & 0 & -5 \\ -1 & -8 & -7 & 9 \\ -4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto punto $a^\top b$ de dos vectores dados a y b. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren los renglones de A, y en el ciclo interior las columnas de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante 2 BOY.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -11 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{1,*}B$ y $AB_{*,2}$.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -1 & -5 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -6 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 5 & -3 & -5 \\ -7 & -7 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \\ -6 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el cuarto renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la tercera columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -7 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 7 & 4 \\ -5 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 7 & -4 & -1 \\ -6 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,5} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,4} \in \mathcal{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{5} \in \mathbb{R}^5$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_1 = ?, \quad (Ac)_5 = ?, \quad (AB)_{2,4} = ?, \quad (AB)_{4,3} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{14\times 5}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 12}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{12\times 6}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{80}$, $v \in \mathbb{R}^{50}$, $W \in \mathcal{M}_{50\times 60}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y sea $C \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r,s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.

$$d = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:

$$D_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_3 \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 60 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & -32 & -16 \\ -1 & -2 & 1 \\ 60 & 50 & 30 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 60 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 63 & 56 & 27 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 70 \\ -2 & 5 & 60 \\ -1 & 7 & 30 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 70 & 4 \\ -2 & 60 & 5 \\ -1 & 30 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 70 \\ -2 & 5 & 60 \\ -1 & 7 & 30 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 72 \\ -2 & 5 & 56 \\ -1 & 7 & 28 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 2 & 6 \\ 7 & -1 & -9 & -8 \\ 3 & 9 & 8 & -7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -1 & -8 \\ -3 & -6 & 8 & -9 \\ 5 & -5 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & -7 & 2 & 8 \\ -4 & -6 & -9 & -3 \\ 4 & 9 & -8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -9 & -3 \\ 1 & -7 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & -8 & -5 \\ 3 & 7 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 & -8 \\ 5 & 1 & -4 & 7 \\ 6 & 9 & -5 & -7 \\ -9 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 1 & -4 \\ -7 & 6 & 9 & -5 \\ 0 & -9 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el vector $\alpha x + y$, donde los datos iniciales son un escalar α y dos vectores x, y. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren las columnas de A, y en el ciclo interior los renglones de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante 3 DMNF.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{1,*}B$ y $AB_{*,4}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -6 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el segundo renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la tercera columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -5 & 5 & -1 \\ 7 & -6 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & -7 & -4 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -7 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{4,6} \in \mathcal{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{6,5} \in \mathcal{M}_{6\times 5}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{6} \in \mathbb{R}^6$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_3 = ?, \quad (Ac)_4 = ?, \quad (AB)_{1,5} = ?, \quad (AB)_{2,4} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{9\times 12}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{12\times 5}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{5\times 14}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{50}$, $v \in \mathbb{R}^{70}$, $W \in \mathcal{M}_{70\times 60}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$AI_2 = A \qquad \text{y} \qquad I_3 A = A.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r, s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$AI_n = A \qquad \text{y} \qquad I_m A = A.$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 4 & -5 & -3 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:

$$D_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$D_3 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -15 & -6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -10 & -6 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -6 \\ 20 & 70 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 70 & 80 \\ 6 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -6 \\ 20 & 70 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -6 \\ 23 & 67 & 74 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 20 & 5 \\ 1 & 70 & -4 \\ -1 & 40 & 3 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 4 & 20 & 5 \\ 2 & 70 & -4 \\ -2 & 40 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 20 & 5 \\ 1 & 70 & -4 \\ -1 & 40 & 3 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 18 & 5 \\ 1 & 69 & -4 \\ -1 & 41 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 & -5 \\ -9 & -4 & -2 & -7 \\ -6 & 8 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -9 & 9 \\ 1 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & -8 & -3 & -6 \\ -5 & 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 2 & -5 & -8 & -3 \\ 7 & 9 & 5 & 8 \\ -6 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -9 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -9 & -4 & 1 \\ 7 & 9 & 5 & 8 \\ 2 & -5 & -8 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -5 & 7 & 6 \\ -3 & -9 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 & 9 \\ -2 & -7 & -4 & 8 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} -6 & 7 & 6 & -5 \\ -3 & 3 & 0 & -9 \\ -8 & 4 & 9 & 2 \\ -2 & -4 & 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto punto $a^\top b$ de dos vectores dados a y b. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren los renglones de A, y en el ciclo interior las columnas de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante 4 GGM.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{3,*}B$ y $AB_{*,2}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el cuarto renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la tercera columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 & 4 \\ -6 & 6 & -5 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & 5 \\ -3 & -6 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{4,5} \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,5} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{5} \in \mathbb{R}^5$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_1 = ?, \quad (Ac)_4 = ?, \quad (AB)_{3,5} = ?, \quad (AB)_{2,2} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{11\times 5}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 12}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{12\times 6}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{70}$, $v \in \mathbb{R}^{50}$, $W \in \mathcal{M}_{50\times 60}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que

$$A + B = B + A.$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y sean $B, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$A + B = B + A.$$

Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r, s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:

$$D_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix},$$

$$D_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 5 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 5 & -5 & -3 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} -10 & -4 & 0 \\ -6 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 60 & 70 & 40 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 70 & 40 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 60 & 70 & 40 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 58 & 74 & 42 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 50 & -8 & 1 \\ 70 & 9 & 2 \\ 40 & 3 & -2 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 51 & -8 & 1 \\ 72 & 9 & 2 \\ 38 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 50 & -8 & 1 \\ 70 & 9 & 2 \\ 40 & 3 & -2 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 50 & -8 & -3 \\ 70 & 9 & -6 \\ 40 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 & -9 \\ 0 & -4 & 7 & -6 \\ 5 & -8 & -3 & 8 \\ -5 & 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 & -9 \\ -3 & -7 & 9 & 1 \\ -6 & 3 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 & -1 \\ -6 & -5 & 9 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & -8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & 5 & -2 & -1 \\ -6 & -5 & 9 & 8 \\ 1 & 6 & -8 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & -9 & -7 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 6 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} 9 & -7 & -9 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & -8 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el vector $\alpha x + y$, donde los datos iniciales son un escalar α y dos vectores x, y. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren las columnas de A, y en el ciclo interior los renglones de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante 5 BOS.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{2,*}B$ y $AB_{*,4}$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -7 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & -7 & -6 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ -5 & -5 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el segundo renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la tercera columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -7 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & -7 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -7 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 7 & 5 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,4} \in \mathcal{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{4,4} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{4} \in \mathbb{R}^4$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_3 = ?, \quad (Ac)_1 = ?, \quad (AB)_{4,4} = ?, \quad (AB)_{5,2} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{12\times 6}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{6\times 13}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{13\times 5}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{70}$, $v \in \mathbb{R}^{80}$, $W \in \mathcal{M}_{80\times 90}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que

$$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y sea $C \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$$

Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r, s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.

$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 & -5 \\ -4 & -5 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:

$$D_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_3 \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 6 & 1 & 5 \\ -9 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 50 & 70 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 48 & 69 & 61 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 50 & 70 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 50 & 70 & 60 \\ 3 & 4 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 20 \\ 6 & 1 & 70 \\ 7 & 2 & 40 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 20 \\ 6 & 2 & 70 \\ 7 & 4 & 40 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 20 \\ 6 & 1 & 70 \\ 7 & 2 & 40 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 18 \\ 6 & 1 & 72 \\ 7 & 2 & 44 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -5 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & -9 \\ -4 & -7 & -6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & -1 & -5 & -2 \\ 8 & 3 & -9 & -8 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 1 & -8 & -2 & 0 \\ 7 & -7 & 3 & 9 \\ -6 & 6 & 5 & -9 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -2 & 0 \\ -6 & 6 & 5 & -9 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 7 & -7 & 3 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & -8 \\ 2 & 7 & 9 & -4 \\ 5 & -6 & 4 & -9 \\ -3 & -5 & -7 & 0 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -8 & 6 \\ 9 & 2 & -4 & 7 \\ 4 & 5 & -9 & -6 \\ -7 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto punto $a^\top b$ de dos vectores dados a y b. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren los renglones de A, y en el ciclo interior las columnas de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante 6 OAAC.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{1,*}B$ y $AB_{*,2}$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -7 & 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el tercer renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la segunda columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -3 & -7 \\ -7 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -3 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,5} \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{5,4} \in \mathcal{M}_{5\times4}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{5} \in \mathbb{R}^5$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_3 = ?, \quad (Ac)_5 = ?, \quad (AB)_{2,1} = ?, \quad (AB)_{4,4} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{10\times5}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times14}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{14\times6}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{70}$, $v \in \mathbb{R}^{80}$, $W \in \mathcal{M}_{80\times60}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que

$$A + (-A) = 0_{\times 2}.$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times4}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$A + (-A) = 0_{\times 2}.$$

Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r, s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.

$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:

$$D_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D_3 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 \\ 8 & -2 & 0 & -6 \\ -4 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -5 & 2 & -3 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} -1 & -8 & 0 \\ -5 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \\ 60 & 80 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \\ 66 & 77 & 34 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \\ 60 & 80 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 7 \\ 60 & 80 & 40 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 80 & -3 & 2 \\ 50 & 3 & -2 \\ 30 & 6 & 1 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 80 & -3 & -4 \\ 50 & 3 & 4 \\ 30 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 80 & -3 & 2 \\ 50 & 3 & -2 \\ 30 & 6 & 1 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 82 & -3 & 2 \\ 48 & 3 & -2 \\ 31 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 9 & -3 \\ 8 & -4 & 0 & -8 \\ 1 & -6 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -7 & -4 \\ -3 & 4 & -9 & 9 \\ -6 & 6 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} -6 & -7 & 7 & -8 \\ 8 & -9 & 9 & 6 \\ -4 & -3 & 2 & -5 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 & -5 \\ 8 & -9 & 9 & 6 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \\ -6 & -7 & 7 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 9 & -9 & -8 \\ 0 & -2 & 7 & 3 \\ 4 & -4 & -6 & -7 \\ -5 & 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} 9 & -8 & -1 & -9 \\ -2 & 3 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el vector $\alpha x + y$, donde los datos iniciales son un escalar α y dos vectores x, y. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren las columnas de A, y en el ciclo interior los renglones de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 1. Variante 7 LCAL.

Propiedades de operaciones con matrices.

Nombre: Calificación (%):

Imprimir las hojas con los ejercicios y resolver en casa en hojas de tamaño carta. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones y justificar bien los pasos en ejercicios teóricos. Las tareas resueltas se entregan junto con las hojas de tareas y se califican de manera muy cruel.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Sean $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ las matrices básicas de tamaño 2×2. Escriba la tabla de multiplicación de estas matrices (es una tabla 4×4).

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Sea A una matriz 2×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos (en este ejercicio no se pide y no se puede hallar la matriz A):

$$A \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *0.5 %.*
Calcule los productos AB, $A_{3,*}B$ y $AB_{*,1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & -6 \\ 3 & -6 & 7 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *0.5 %.*
Calcule el producto Ab. Luego recuerde la fórmula que representa Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *0.5 %.*
Calcule el producto AB. Recuerde la fórmula que representa el tercer renglón de AB como una combinación lineal de los renglones de B y haga la comprobación. Recuerde la fórmula que representa la segunda columna de AB como una combinación lineal de las columnas de A y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 & -6 & -6 \\ -4 & -7 & -5 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 7 \\ -4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ -5 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *0.5 %.*
Sean $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{4,4} \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$, $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{4,5} \in \mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{R})$, $c = \left[c_k\right]_{k=1}^{4} \in \mathbb{R}^4$. Consideremos los productos Ac y AB. Exprese sus entradas indicadas abajo a través de entradas de A, B y c. Primero escriba las sumas de manera explícita (todos los sumandos), luego en forma breve usando la notación $\sum$.

$$(Ac)_4 = ?, \quad (Ac)_2 = ?, \quad (AB)_{1,2} = ?, \quad (AB)_{3,5} = ?.$$

Ejercicio 7. *0.5 %.*
I. Sean $A \in \mathcal{M}_{13\times7}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{7\times14}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{14\times5}(\mathbb{R})$. Supongamos que el producto ABC se calcula como $(AB)C$ y se utiliza uno de los algoritmos triviales para multiplicar matrices. ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan en el proceso? ¿Cuántas multiplicaciones de números reales se utilizan si el mismo producto ABC se calcula como $A(BC)$?
II. De manera similar, calcule el número de multiplicaciones de números reales en el cálculo de los productos $(uv^\top)W$ y $u(v^\top W)$, donde $u \in \mathbb{R}^{70}$, $v \in \mathbb{R}^{90}$, $W \in \mathcal{M}_{90\times80}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Escribiendo las matrices en forma explícita y justificando todos los pasos demuestre que

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

Ejercicio 9. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ y sean $B, C \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Ejercicio 10. *1.5 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$. Escribiendo matrices en forma extensa y justificando todos los pasos demuestre que

$$AI_2 = A \qquad \text{y} \qquad I_3 A = A.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

Indicación. Primero verifique que las operaciones tienen sentido y que las matrices escritas en ambos lados de la igualdad son del mismo tamaño. Segundo, demuestre que *la entrada general* (digamos, la entrada (r, s)) de la matriz del lado izquierdo coincide con la entrada correspondiente de la matriz del lado derehcho. En la segunda parte hay que justificar todos los pasos.

Ejercicio 12. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Razonando como en el problema anterior, demuestre que

$$AI_n = A \qquad \text{y} \qquad I_m A = A.$$

Ejercicio 14. *0.5 %.*
Escriba la matriz $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ y calcule los productos Dv, rD, DA y BD.

$$d = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15. *0.5 %.*
Encuentre (adivine) algunas matrices diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 que satisfagan las siguientes igualdades:

$$D_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D_3 \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 6 \\ -9 & 15 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} D_4 = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Ejercicio 16. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 17. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 40 & 30 & 20 \\ 9 & 8 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 40 & 30 & 20 \\ 9 & 8 & -8 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 40 & 30 & 20 \\ 9 & 8 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 39 & 32 & 21 \\ 9 & 8 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 7 & -2 \\ 30 & -1 & 1 \\ 80 & 6 & 2 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 60 \\ 1 & -1 & 30 \\ 2 & 6 & 80 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 60 & 7 & -2 \\ 30 & -1 & 1 \\ 80 & 6 & 2 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 54 & 7 & -2 \\ 33 & -1 & 1 \\ 86 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 18. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. *0.5 %.*
Calcule la permutación $\psi = \varphi^{-1}$, las matrices P_φ y P_ψ de las permutaciones φ y ψ, y los productos $P_\varphi A$, AP_φ, $P_\psi B$ y BP_ψ.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & -7 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -6 & 3 \\ 9 & -3 & 7 & -8 \\ 8 & 6 & -4 & -9 \\ 5 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 21. *0.5 %.*
Encuentre las matrices de permutaciones P_φ y P_ψ que cumplan con las siguientes igualdades. Escriba las permutaciones correspondientes φ y ψ.

$$P_\varphi \begin{bmatrix} -8 & -4 & 9 & -2 \\ 7 & -3 & -7 & 8 \\ -5 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -7 & 8 \\ -5 & 1 & 4 & 6 \\ -8 & -4 & 9 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & -8 & 3 \\ -1 & 0 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 6 & -2 \\ 5 & -9 & 1 & -7 \end{bmatrix} P_\psi = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \\ 9 & -2 & 4 & 6 \\ -9 & -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto punto $a^\top b$ de dos vectores dados a y b. Utilice un ciclo for. Muestre por pasos cómo trabaja la función con vectores de longitud 4. Calcule el número de operaciones de multiplicación para $n = 4$ y luego para n general.

Ejercicio 23. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Utilice un ciclo for y la función del ejercicio anterior. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 3×4 y luego para tamaños generales.

Ejercicio 24. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto Ab, donde A es una matriz dada y b es un vector dado. Escriba un análogo de la función anterior, pero ahora utilice dos ciclos for encajados y no use funciones auxiliares. Nótese que en el ciclo exterior se recorren los renglones de A, y en el ciclo interior las columnas de A. Muestre por pasos cómo trabaja la función si A es de tamaño 3×4.