Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante α.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -7 \\ -2 & -5 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 & -5 \\ -2 & 6 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \\ 0 & 7 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -6 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -6 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante β.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 7 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & -7 \\ -2 & 6 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 4 & -10 & -5 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -14 \\ 12 \\ -15 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 4 & -10 & -5 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) \coloneqq \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante 1 DVF.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -3 & 3 & -6 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -5 & -1 \\ 6 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -6 \\ -1 & -6 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\mathrm{matr},\infty}$, $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\mathrm{matr},1}$, $\mathrm{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\mathrm{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\mathrm{matr},2}$, $\mathrm{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\mathrm{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\mathrm{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\mathrm{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\mathrm{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\mathrm{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\mathrm{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 7 \\ 5 & 4 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 7 \\ 5 & 4 & -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) \coloneqq \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante 2 BOY.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ -7 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 & 2 \\ -6 & -3 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\operatorname{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\operatorname{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\operatorname{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\operatorname{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\operatorname{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & -1 \\ -4 & -10 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ -12 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & -1 \\ -4 & -10 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) \coloneqq \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante 3 DMNF.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 7 & -3 & -7 & -7 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores $s_1 u_1$, $s_2 u_2$ y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores $s_1 u_1$, $s_2 u_2$ y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante 4 GGM.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \\ -6 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & -6 \\ 4 & -4 & -1 & -7 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -7 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores $s_1 u_1$, $s_2 u_2$ y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores $s_1 u_1$, $s_2 u_2$ y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ -15 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) \coloneqq \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante 5 BOS.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \\ -5 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & -7 & 3 \\ -7 & 3 & 3 & -6 \\ 7 & -2 & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -13 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) \coloneqq \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante 6 OAAC.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 & -4 \\ -6 & 1 & 7 & 6 \\ -5 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores $s_1 u_1$, $s_2 u_2$ y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores $s_1 u_1$, $s_2 u_2$ y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 1 \\ 1 & -10 & -5 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 1 \\ 1 & -10 & -5 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) \coloneqq \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante 7 LCAL.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & -2 & 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & -3 \\ -4 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & -3 \\ -4 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 5. Variante 8.

Solución de sistemas lineales con métodos iterativos.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -6 & -7 & 6 \\ -5 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & -7 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$.

III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\mathrm{matr},1}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular A^{-1}.

II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_\infty(A)$.

III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.

IV. Calcular la matriz $A^\top A$ y sus valores propios.

V. Calcular los valores singulares de la matriz A.

VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.

VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A.

Ejercicio 4. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *4 %.*
Construya una **descomposición en valores singulares** $A = USV^\top$ de la matriz dada. Compruebe que las matrices U y V son ortogonales y que $AV = US$. Dibuje en el plano los vectores s_1u_1, s_2u_2 y la imagen de la bola unitaria del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal $x \mapsto Ax$. Calcule las normas $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$ y el número de condicionamiento $\text{cond}_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 6, 7, 8, 9 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 6. *1 %.*
Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 4 & 10 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -14 \\ -10 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Consideramos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 4 & 10 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.

II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.

III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.

IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.

V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.

VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radio espectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 8. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 9. *3 %.*
Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 10, 11, 12 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 10. *1 %.*
Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas lineas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) \coloneqq \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 12. *4 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_2$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.