Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante α.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 60 & 80 & 50 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 80 & 50 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 60 & 80 & 50 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 58 & 76 & 54 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 40 & -2 & -8 \\ 20 & 1 & 5 \\ 70 & 2 & 6 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 34 & -2 & -8 \\ 23 & 1 & 5 \\ 76 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 40 & -2 & -8 \\ 20 & 1 & 5 \\ 70 & 2 & 6 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 40 & -2 & -32 \\ 20 & 1 & 20 \\ 70 & 2 & 24 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & -3 \\ 8 & -6 & -7 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -10 & 5 \\ -10 & 20 & 2 \\ 5 & 2 & 11 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 16 & 4 \\ -4 & 26 & -9 & 9 \\ 16 & -9 & 21 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 14 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 8 & 8 & 6 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & -1 & -9 & 6 & -4 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & -9 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & -2 & 4 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 12 & -14 & -12 \\ 5 & -2 & 9 & 14 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante β.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 30 & 70 & 20 \\ 5 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 66 & 22 \\ 5 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 30 & 70 & 20 \\ 5 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 30 & 70 & 20 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 60 \\ -8 & 1 & 70 \\ 9 & -1 & 30 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 60 \\ -8 & -3 & 70 \\ 9 & 3 & 30 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 7 & 2 & 60 \\ -8 & 1 & 70 \\ 9 & -1 & 30 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 54 \\ -8 & 1 & 67 \\ 9 & -1 & 33 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & 5 & 6 & -6 \\ 4 & 7 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -12 \\ -3 & 26 & 14 \\ -12 & 14 & 24 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -15 & 20 & -5 \\ -15 & 18 & -3 & -3 \\ 20 & -3 & 29 & -16 \\ -5 & -3 & -16 & 30 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ -17 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -6 & -7 & 1 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & -7 & -8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -9 & 1 & -7 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 8 \\ 0 & 9 & -4 & 8 & 5 & 5 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 15 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 9 & -1 & 9 \\ -3 & 9 & -15 & 13 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $\mathsf{L}\mathsf{x} = \mathsf{b}$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n} \times \mathsf{n}$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $\mathsf{n} = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n} \times \mathsf{n}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 1 LNI.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 60 & 50 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 57 & 44 & 83 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 60 & 50 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 60 & 50 & 80 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 50 \\ 2 & -1 & 30 \\ 6 & 1 & 80 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 54 \\ 2 & -1 & 32 \\ 6 & 1 & 78 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 7 & -2 & 50 \\ 2 & -1 & 30 \\ 6 & 1 & 80 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 50 \\ 2 & -4 & 30 \\ 6 & 4 & 80 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & -4 \\ 6 & 6 & 8 & -5 \\ -2 & -8 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -25 & -5 \\ -25 & 29 & 13 \\ -5 & 13 & 33 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 5 & -15 \\ 15 & 13 & 9 & -9 \\ 5 & 9 & 19 & -6 \\ -15 & -9 & -6 & 26 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -8 & 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -8 & 4 & -5 & -2 & 6 \\ 0 & -9 & -3 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 15 & -5 & 14 \\ 9 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 10 & 1 & 4 & 14 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n\times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 2 SAA.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} -8 & 8 & 5 \\ 70 & 30 & 50 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 70 & 30 & 50 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} -8 & 8 & 5 \\ 70 & 30 & 50 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 8 & 5 \\ 72 & 28 & 46 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 30 \\ 2 & 4 & 60 \\ -1 & -5 & 70 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 30 \\ -4 & 4 & 60 \\ 2 & -5 & 70 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 30 \\ 2 & 4 & 60 \\ -1 & -5 & 70 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 31 \\ 2 & 4 & 62 \\ -1 & -5 & 69 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -5 & 1 \\ 8 & 4 & 7 & -1 \\ -4 & -5 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -15 & 15 \\ -15 & 25 & -5 \\ 15 & -5 & 19 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -12 & 20 & 4 \\ -12 & 34 & -10 & -8 \\ 20 & -10 & 35 & 7 \\ 4 & -8 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 7 & -4 & -4 & -7 & -4 & 9 \\ 0 & -6 & -5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & 8 & -8 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & 1 & 9 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 1 \\ 4 & -10 & 2 & 0 \\ 6 & -14 & 2 & 6 \\ 4 & -9 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $\mathsf{L}\mathsf{x} = \mathsf{b}$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n} \times \mathsf{n}$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $\mathsf{n} = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n}\times\mathsf{n}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 3 RVG.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \\ 80 & 70 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 80 & 70 & 60 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \\ 80 & 70 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \\ 84 & 68 & 56 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 70 & 2 & 6 \\ 20 & 1 & 5 \\ 60 & -1 & -8 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 76 & 2 & 6 \\ 23 & 1 & 5 \\ 57 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 70 & 2 & 6 \\ 20 & 1 & 5 \\ 60 & -1 & -8 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 70 & -4 & 6 \\ 20 & -2 & 5 \\ 60 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & -6 & -8 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -15 & 5 \\ -15 & 13 & 1 \\ 5 & 1 & 21 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -2 & 4 \\ -8 & 32 & 12 & -16 \\ -2 & 12 & 30 & -11 \\ 4 & -16 & -11 & 18 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -15 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & 0 & -5 & -1 & 9 \\ 0 & -4 & -4 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -8 & 9 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 9 & -5 & 7 & -3 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & -3 \\ 3 & 12 & -8 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 4 CME.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 6 & -9 & 8 \\ 2 & -2 & 1 \\ 30 & 70 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & -9 & 8 \\ 30 & 70 & 80 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 6 & -9 & 8 \\ 2 & -2 & 1 \\ 30 & 70 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 8 \\ 2 & -2 & 1 \\ 34 & 66 & 82 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 30 & 1 \\ 5 & 60 & -1 \\ -7 & 80 & 2 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 4 & 31 & 1 \\ 5 & 59 & -1 \\ -7 & 82 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 30 & 1 \\ 5 & 60 & -1 \\ -7 & 80 & 2 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} -8 & 30 & 1 \\ -10 & 60 & -1 \\ 14 & 80 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 4 \\ -3 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -6 \\ 9 & 34 & -11 \\ -6 & -11 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 16 & -12 & -8 \\ 16 & 25 & -9 & -5 \\ -12 & -9 & 35 & 2 \\ -8 & -5 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -4 & -1 & 4 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 & -6 & -5 \\ 0 & 7 & 4 & 8 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -4 & 4 & -7 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & 2 \\ 8 & 14 & -9 & 11 \\ 4 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 5 GMF.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 80 & 20 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 79 & 22 & 48 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 80 & 20 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 8 & 9 & 7 \\ 80 & 20 & 50 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 20 & -2 \\ 1 & 50 & 2 \\ 4 & 30 & -1 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 8 & 20 & -4 \\ 1 & 50 & 4 \\ 4 & 30 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 8 & 20 & -2 \\ 1 & 50 & 2 \\ 4 & 30 & -1 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 8 & 24 & -2 \\ 1 & 46 & 2 \\ 4 & 32 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & -2 \\ 8 & 2 & 4 & -7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 13 & 8 \\ -2 & 8 & 30 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & -4 & 4 \\ -4 & 10 & 7 & -4 \\ -4 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & 31 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -4 & -5 & -9 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & -7 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 8 & 9 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -7 & -1 & -5 & 4 & -2 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 8 \\ 12 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $\mathsf{L}\mathsf{x} = \mathsf{b}$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n} \times \mathsf{n}$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $\mathsf{n} = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n}\times\mathsf{n}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 6 GSM.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & -3 \\ 60 & 50 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 50 & 40 \\ 5 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & -3 \\ 60 & 50 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & -3 \\ 66 & 53 & 37 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 80 \\ 3 & 2 & 20 \\ 8 & -1 & 70 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 80 \\ 3 & 8 & 20 \\ 8 & -4 & 70 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 80 \\ 3 & 2 & 20 \\ 8 & -1 & 70 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 84 \\ 3 & 2 & 16 \\ 8 & -1 & 72 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 8 & 8 & -2 \\ 8 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 12 \\ -6 & 29 & 7 \\ 12 & 7 & 29 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 & 4 \\ -2 & 26 & -9 & 13 \\ 8 & -9 & 33 & 1 \\ 4 & 13 & 1 & 23 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ -11 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 7 & -7 & 9 & 6 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -5 & 7 & 5 \\ 0 & -9 & -8 & 6 & 6 & -8 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 & 5 \\ -15 & -1 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & 7 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 7 LRJ.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 50 & 30 & 20 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 50 & 30 & 20 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 50 & 30 & 20 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 52 & 31 & 19 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 60 \\ -1 & 8 & 40 \\ 2 & 9 & 30 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} -2 & -7 & 60 \\ 2 & 8 & 40 \\ -4 & 9 & 30 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -7 & 60 \\ -1 & 8 & 40 \\ 2 & 9 & 30 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 58 \\ -1 & 8 & 42 \\ 2 & 9 & 26 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 20 \\ 5 & 10 & -2 \\ 20 & -2 & 24 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -15 & -20 & -5 \\ -15 & 25 & 12 & -9 \\ -20 & 12 & 25 & 1 \\ -5 & -9 & 1 & 15 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -3 & -8 & 2 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 5 & 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & -2 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 12 & 7 \\ -3 & -7 & -11 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 8 & 15 & 14 & 13 \\ -2 & -7 & -13 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $\mathsf{L}\mathsf{x} = \mathsf{b}$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n} \times \mathsf{n}$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $\mathsf{n} = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n} \times \mathsf{n}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 8 MRP.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 60 & 50 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 60 & 50 & 80 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 60 & 50 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 62 & 49 & 78 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 3 & 1 \\ 70 & 4 & -1 \\ 80 & -4 & 2 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 22 & 3 & 1 \\ 68 & 4 & -1 \\ 84 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 20 & 3 & 1 \\ 70 & 4 & -1 \\ 80 & -4 & 2 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 20 \\ -1 & 4 & 70 \\ 2 & -4 & 80 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 32 & -16 \\ -4 & -16 & 33 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 20 & -8 & -8 \\ 20 & 34 & -7 & -1 \\ -8 & -7 & 30 & 12 \\ -8 & -1 & 12 & 18 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -15 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -5 & -4 & 2 & 9 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 6 & 9 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & -6 & -7 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 6 & 8 & -4 & 3 \\ 9 & 7 & -11 & 9 \\ 3 & -11 & -14 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $\mathsf{L}\mathsf{x} = \mathsf{b}$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n} \times \mathsf{n}$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $\mathsf{n} = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $\mathsf{n} \times \mathsf{n}$.

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 9 RFJC.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 50 & 80 & 70 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 8 \\ 50 & 80 & 70 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 50 & 80 & 70 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 52 & 79 & 68 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 2 & 9 \\ 50 & -2 & 6 \\ 20 & -1 & 5 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 24 & 2 & 9 \\ 56 & -2 & 6 \\ 23 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 30 & 2 & 9 \\ 50 & -2 & 6 \\ 20 & -1 & 5 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 30 & 9 \\ -2 & 50 & 6 \\ -1 & 20 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -9 & -9 \\ -9 & 34 & 19 \\ -9 & 19 & 29 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -14 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -20 & -15 & 20 \\ -20 & 25 & 15 & -22 \\ -15 & 15 & 26 & -18 \\ 20 & -22 & -18 & 25 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -8 & -2 & -5 & 9 & -7 & 8 \\ 0 & -2 & 7 & 2 & 4 & -9 \\ 0 & -6 & -5 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & -7 & -8 \\ 0 & -9 & 5 & 4 & -7 & -4 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \\ 8 & -6 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \\ 6 & -13 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & -10 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 10 HLD.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 60 & 50 & 40 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 & 46 & 38 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 60 & 50 & 40 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 60 & 50 & 40 \\ -4 & 7 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 40 \\ 9 & 1 & 20 \\ 6 & -2 & 80 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 40 \\ 9 & -2 & 20 \\ 6 & 4 & 80 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 7 & -1 & 40 \\ 9 & 1 & 20 \\ 6 & -2 & 80 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 41 \\ 9 & 1 & 19 \\ 6 & -2 & 82 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -10 & -10 \\ -10 & 20 & 8 \\ -10 & 8 & 14 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 15 \\ -14 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 & -15 \\ 15 & 13 & -11 & -15 \\ -5 & -11 & 33 & 15 \\ -15 & -15 & 15 & 27 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -6 & -8 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -9 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 9 & -3 & 4 & 3 & -4 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 13 & 10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -1 \\ 15 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & -9 & 11 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 11 GHS.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 80 & 60 & 40 \\ 5 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 & 61 & 39 \\ 5 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 80 & 60 & 40 \\ 5 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \\ 80 & 60 & 40 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 20 & -2 \\ -1 & 40 & 3 \\ 1 & 80 & 4 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 20 & 4 \\ -1 & 40 & -6 \\ 1 & 80 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 20 & -2 \\ -1 & 40 & 3 \\ 1 & 80 & 4 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 24 & -2 \\ -1 & 38 & 3 \\ 1 & 82 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -8 & 7 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 6 \\ -6 & 8 & -6 \\ 6 & -6 & 30 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 3 & -3 \\ 9 & 34 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & 17 & -13 \\ -3 & 12 & -13 & 23 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 6 & -5 & -9 & -8 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -9 & -2 & -6 & -4 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 1 & -8 \\ 0 & -7 & -7 & -7 & 9 & 2 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 12 & 10 \\ 3 & 9 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*

En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*

En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 12 MMJ.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 30 & 20 & 70 \\ 5 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 22 & 68 \\ 5 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 30 & 20 & 70 \\ 5 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 30 & 20 & 70 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 20 & 3 \\ 1 & 30 & 7 \\ 2 & 70 & 8 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} -6 & 20 & 3 \\ 3 & 30 & 7 \\ 6 & 70 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 20 & 3 \\ 1 & 30 & 7 \\ 2 & 70 & 8 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} -2 & 22 & 3 \\ 1 & 29 & 7 \\ 2 & 68 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 8 & -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 9 \\ -3 & 5 & -5 \\ 9 & -5 & 35 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -15 & 15 & 10 \\ -15 & 18 & -6 & -18 \\ 15 & -6 & 26 & 6 \\ 10 & -18 & 6 & 25 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 7 & -1 & 6 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & -9 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & -3 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 5 \\ 10 & 6 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 12 & 9 & -7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $\mathsf{L}x = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I, Licenciatura.
Tarea 2. Variante 13 MCEH.

Matrices triangulares, descomposiciones LU, PLU y de Cholesky.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos intermedios, incluso en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *0.5 %.*
Calcule los productos E_1A, AE_1, E_2A, AE_2, E_3A y AE_3. Indique a qué operación elemental corresponde cada una de estas multiplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *0.5 %.*
Encuentre matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 que satisfagan las siguientes igualdades. Además escriba sus inversas E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1} y E_4^{-1}.

$$E_1 \begin{bmatrix} 60 & 40 & 80 \\ -2 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 36 & 78 \\ -2 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \qquad E_2 \begin{bmatrix} 60 & 40 & 80 \\ -2 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 60 & 40 & 80 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 30 \\ 4 & -2 & 40 \\ 5 & -1 & 20 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 18 & 1 & 30 \\ 8 & -2 & 40 \\ 10 & -1 & 20 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 9 & 1 & 30 \\ 4 & -2 & 40 \\ 5 & -1 & 20 \end{bmatrix} E_4 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 29 \\ 4 & -2 & 42 \\ 5 & -1 & 21 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso **escriba las matrices A y $\mathbf{A^{-1}}$ como productos de matrices elementales**. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -6 & -7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1.5 %.*
Encuentre la **factorización LU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización LU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 6 & 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 34 & 9 \\ -4 & 9 & 22 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1.5 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -10 & 25 & 10 \\ -10 & 20 & -18 & -8 \\ 25 & -18 & 33 & 8 \\ 10 & -8 & 8 & 18 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -10 \\ 8 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *0.5 %.*
Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Elija el pivote para el segundo paso aplicando **varias estrategias de pivoteo**:

I. Eliminación con pivotes diagonales (en otras palabras, sin pivoteo).

II. Pivoteo parcial.

III. Pivoteo parcial escalado.

Justifique las respuestas. No aplique las operaciones elementales, solamente indique el elemento pivote para cada una de las tres estrategias.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 5 & -8 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -4 & 6 & -2 \end{array}\right].$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -9 & -15 & -3 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *1.5 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ -15 & -1 & 12 & -14 \\ 3 & 9 & 6 & 14 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejercicio se trata de los 8 sistemas de ecuaciones lineales con matrices unitriangulares inferiores y triangulares superiores obtenidos en los ejercicios 5, 6, 10, 11. Por supuesto, las respuestas deberán coincidir con las respuestas obtenidas antes.

Ejercicio 12. *2 %.*
Resolver los sistemas de ecuaciones con matrices triangulares que surgieron después de factorizaciones LU y PLU, usando operaciones lineales por columnas.

Ejercicio 13. *1 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz **unitriangular inferior** y b es un vector. La función debe realizar **operaciones lineales con fragmentos de columnas** (usando la función axpy programada anteriormente o una operación interna del lenguaje de programación) aprovechando de manera eficiente la estructura de L. Muestre por pasos cómo trabaja la función, si L es de orden 4. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en la función auxiliar) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.

Ejercicio 14. *2 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **algoritmo de factorización LU** por renglones o por columnas. La función puede regresar el par de matrices L y U o una matriz que combina L y U en las partes correspondientes. Muestre por pasos con un ejemplo cómo trabaja la función para $n = 4$. Se recomienda indicar los comandos del algoritmo en la solución de alguno de los ejercicios numéricos anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación (incluso las multiplicaciones que se hacen en las funciones auxiliares) primero para el caso 4×4 y luego para $n \times n$.