

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante α .

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 5 & -5 & 7 \\ 2 & -5 & 6 & -4 \\ -3 & 4 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 4 & 2 & -10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante β .

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & -7 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 7 \\ -4 & 3 & -5 & -6 \\ -7 & 0 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 1 LNI.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -4 & -6 \\ -4 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \\ -6 & -7 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -5 \\ 6 & -10 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 2 SAA.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 & 1 \\ -7 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -7 & 10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 3 RVG.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -7 & -6 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -6 & 1 \\ -5 & 1 & -6 & -2 \\ 5 & -7 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -5 & 10 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 4 CME.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 6 \\ 6 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -10 & 7 \\ 6 & -3 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 5 GMF.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -7 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & -5 & 5 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & -10 & -5 \\ 5 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} satisface la igualdad $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(\mathbf{x}) = c$ de la función $f(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$ y los puntos $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 6 GSM.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ -2 & 5 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 2 \\ 1 & -6 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -14 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & -10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 7 LRJ.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 7 & -2 \\ -7 & -4 & -3 & -3 \\ -5 & 6 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 5 \\ 2 & -10 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 5 \\ -1 & -10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 8 MRP.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -7 & 2 \\ -5 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 7 \\ -6 & 10 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 9 RFJC.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 7 \\ -5 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -6 & -2 \\ -6 & -6 & -7 & -5 \\ 3 & -1 & -7 & -1 \\ -7 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} satisface la igualdad $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(\mathbf{x}) = c$ de la función $f(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$ y los puntos $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 10 HLD.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -5 \\ 7 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -4 & -3 \\ -7 & -6 & 0 & 7 \\ -5 & -5 & -3 & -5 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector u es la solución del sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 2 \\ 4 & -10 & 1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = D^{-1}(b - Sx^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $Ax = b$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$ y usando la fórmula recursiva $x^{(s+1)} = T^{-1}(b - Ux^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, donde u es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} satisface la igualdad $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(\mathbf{x}) = c$ de la función $f(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$ y los puntos $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 11 GHS.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -7 & -1 \\ -4 & 4 & 7 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -1 & -4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 12 MMJ.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -4 & 7 \\ -7 & 5 & 5 & -6 \\ 4 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -6 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -6 & -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 4 \\ -5 & -10 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.

Análisis Numérico I, Licenciatura.

Tarea 4. Variante 13 MCEH.

Normas matriciales. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: de Jacobi, de Gauss y Seidel, del gradiente, del gradiente conjugado.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas individuales se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 3×3 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -1 \\ -7 & 7 & -7 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 2. 0.5 %.

Está dada una matriz A de tamaño 4×4 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -5 & 2 \\ 1 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- II. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\|Ax\|_\infty = \|A\|_{\text{matr},\infty}$.
- III. Calcular la norma matricial $\|A\|_{\text{matr},1}$.
- IV. Construir un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = \|A\|_{\text{matr},1}$.

Ejercicio 3. 2 %.

Está dada una matriz cuadrada A de orden 2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Calcular A^{-1} .
- II. Calcular $\|A\|_{\text{matr},\infty}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},\infty}$, $\text{cond}_{\infty}(A)$.
- III. Calcular $\|A\|_{\text{matr},1}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},1}$, $\text{cond}_1(A)$.
- IV. Calcular la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- V. Calcular los valores singulares de la matriz A .
- VI. Calcular $\|A\|_{\text{matr},2}$, $\|A^{-1}\|_{\text{matr},2}$, $\text{cond}_2(A)$.
- VII. Calcular el espectro y el radio espectral de A .

En los ejercicios 4, 5, 6, 7 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 4. 1 %.

Compruebe que el vector \mathbf{u} es la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. 3 %.

Consideramos la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -4 & 10 & 4 \\ 5 & -4 & -10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que la matriz A es estrictamente diagonal dominante por renglones.
- II. Halle dos matrices D y S tales que $A = D + S$, D es una matriz diagonal y S tiene entradas diagonales nulas.
- III. Calcule la matriz $D^{-1}S$ y la norma $\|D^{-1}S\|_{\text{matr},\infty}$.
- IV. Halle dos matrices T y U tales que $A = T + U$, T es una matriz triangular inferior y U es una matriz estrictamente triangular superior.
- V. Calcule la matriz $T^{-1}U$.
- VI. Usando algún sistema de álgebra computacional calcule el radiopectral de $T^{-1}U$.

Ejercicio 6. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Jacobi** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - S\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

Ejercicio 7. 3 %.

Haga dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, empezando con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y usando la fórmula recursiva $\mathbf{x}^{(s+1)} = T^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(s)})$.
- Se puede aplicar el método en la forma matricial o en coordenadas.
- Calcule también las normas $\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{u}\|_\infty$, donde \mathbf{u} es la solución exacta del sistema.

En los ejercicios 8, 9, 10 se considera el mismo sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 8. 1 %.

Compruebe que el vector u satisface la igualdad $Au = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.
- Muestre en un dibujo algunas líneas de nivel $f(x) = c$ de la función $f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ y los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$. Se recomienda usar MATLAB u otro sistema de álgebra computacional.

Ejercicio 10. 4 %.

Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Indicaciones:

- Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$.
- Calcule también las normas $\|x^{(s)} - u\|_\infty$, $s = 1, 2$, donde u es la solución exacta del sistema.