



Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante α .

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que
$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$
- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

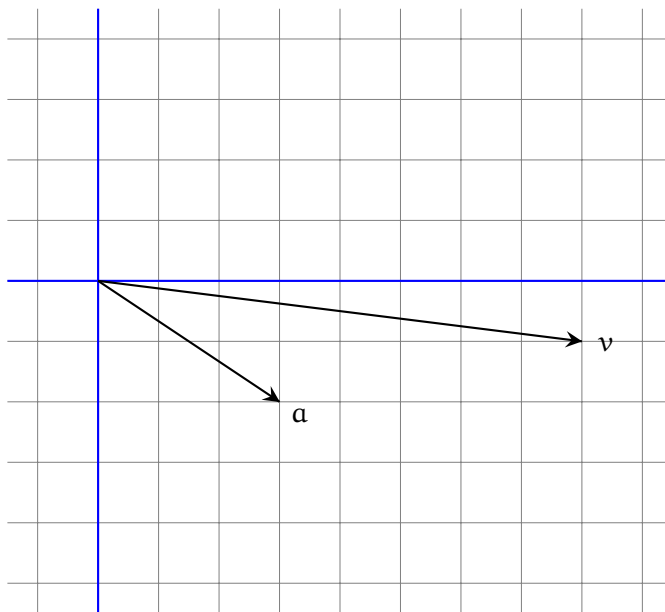
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{6}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 4\mathbf{b}_1}{8}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2}{7}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 19 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 12 \\ -4 & 6 & 19 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -18 \\ -2 \\ -16 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 5 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -16 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante β .**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

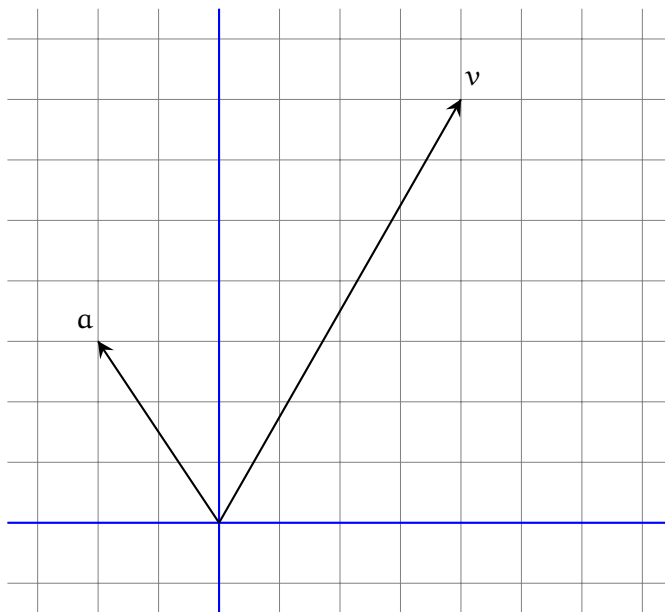
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{8}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{b}_1}{7}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2}{6}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ -38 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 5 & 9 & -38 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -14 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -14 \\ 5 & -6 & -16 \end{bmatrix}.$$



Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 1 BPMN.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

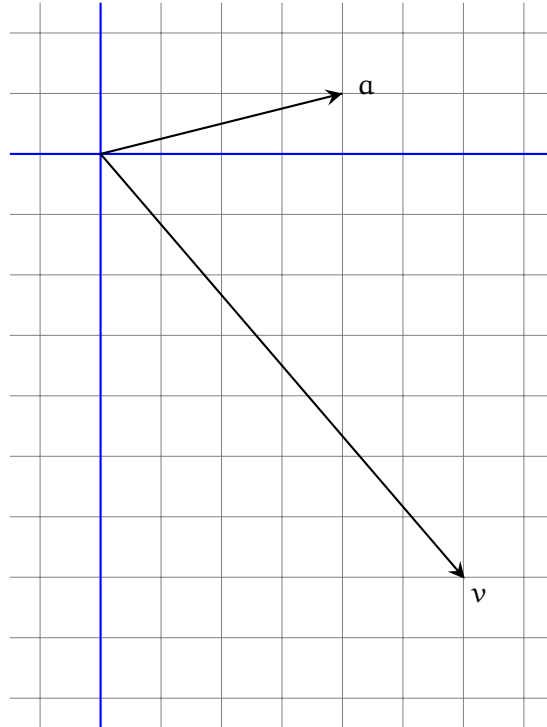
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{4}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 9\mathbf{b}_1}{5}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 8\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2}{3}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 11 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & -8 & -30 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 2 CMSG.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

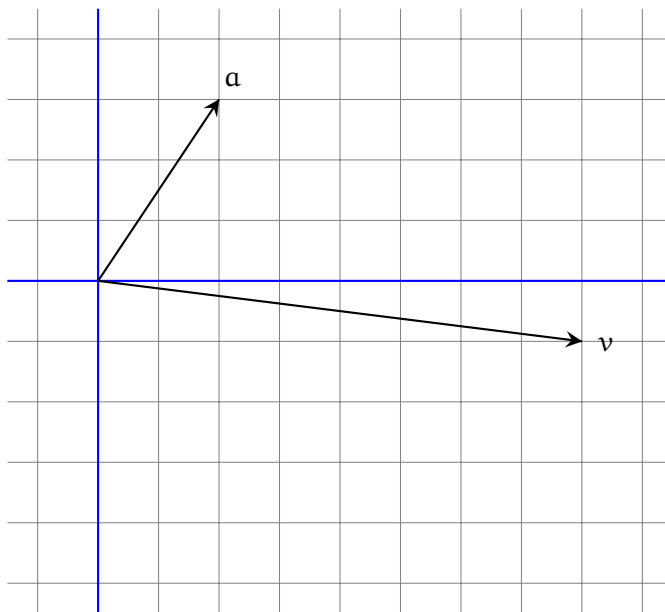
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -12 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{6}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{b}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 8\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2}{7}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ -14 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 28 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & -14 \\ 4 & 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 11 \\ -5 & 6 & -15 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 3 DSF.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

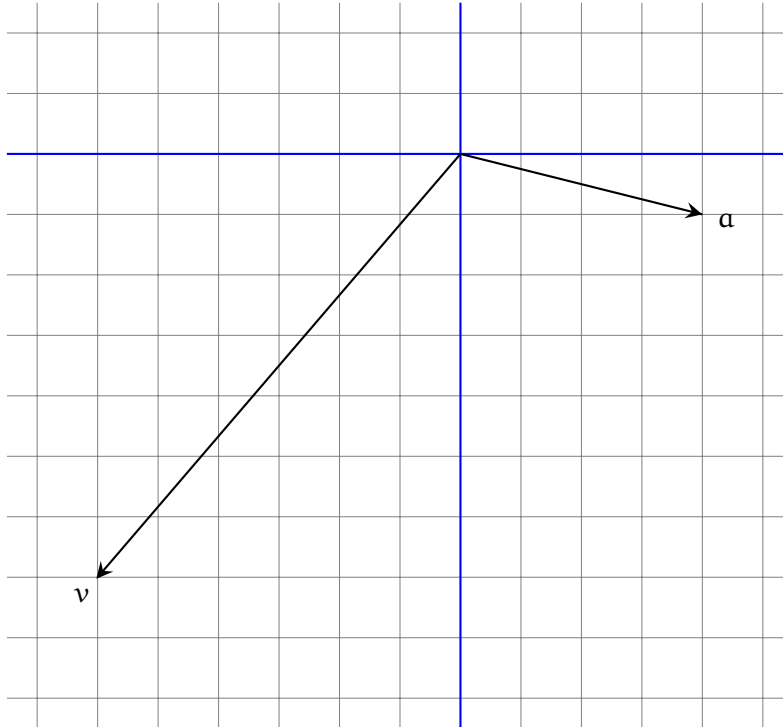
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{6}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{b}_1}{8}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1 - 7\mathbf{b}_2}{4}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -19 \\ 9 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -19 \\ 4 & 9 & 9 \\ -1 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -10 \\ 1 & -6 & 20 \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & -12 \end{bmatrix}.$$



Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 4 GLMA.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que
$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$
- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

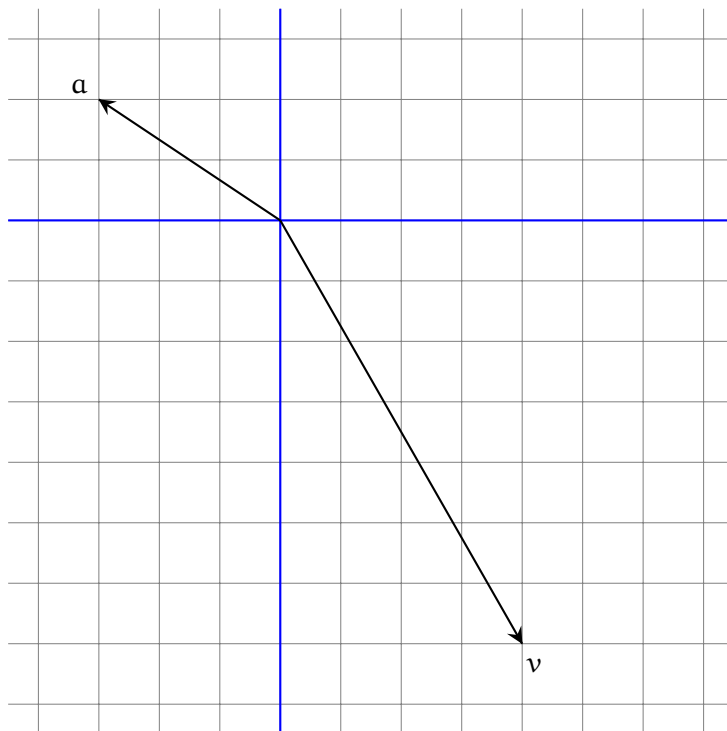
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.

**Ejercicio 4.** 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{5}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 + 7\mathbf{b}_1}{3}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - 4\mathbf{b}_1 + 9\mathbf{b}_2}{6}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & -5 & 12 \\ 2 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -9 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 13 \\ 3 & -2 & -9 \\ 5 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 5 GHS.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

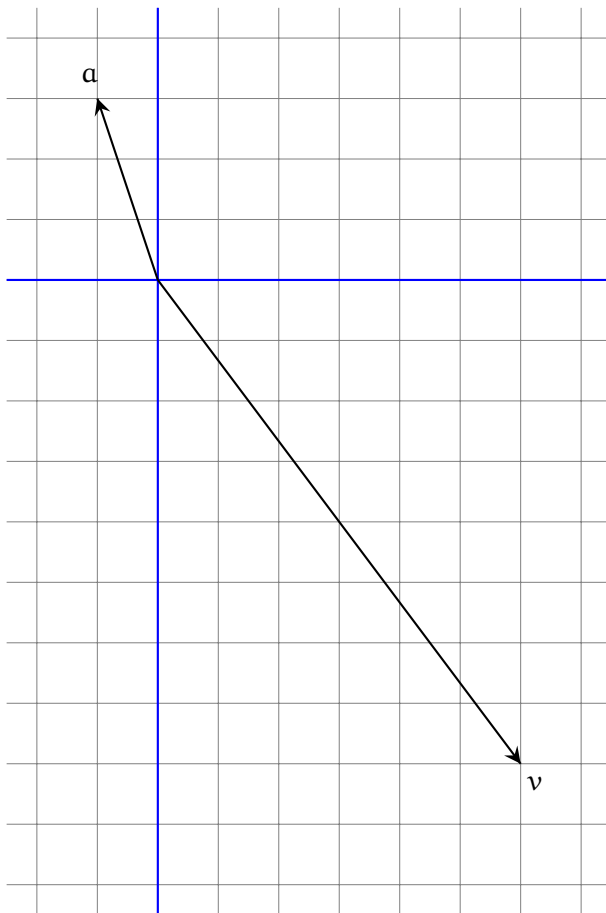
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{7}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{b}_1}{3}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2}{2}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -13 \\ -2 & 6 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -27 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & 8 & -27 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 6 HGA.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

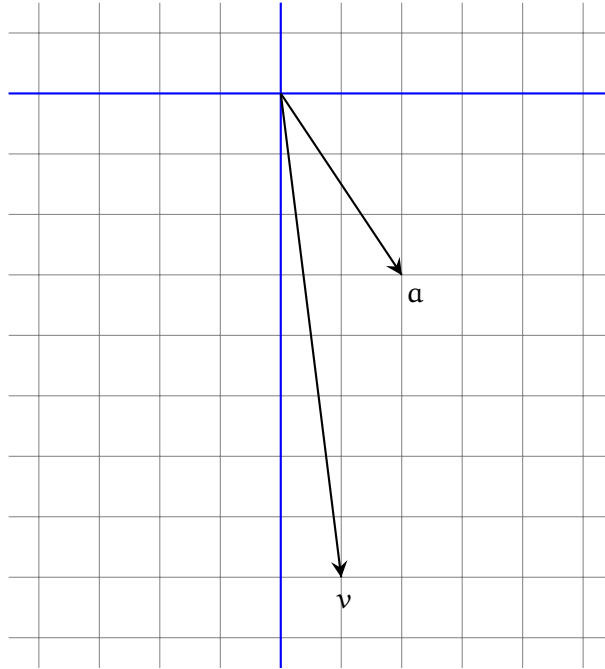
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -9 \\ -2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_1}{4}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 6\mathbf{b}_1 + 8\mathbf{b}_2}{7}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 18 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 14 \\ 1 & 5 & 18 \\ 2 & 4 & 17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 15 \\ -5 & -6 & 1 \\ 1 & -4 & -13 \end{bmatrix}.$$



Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 7 HSJF.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

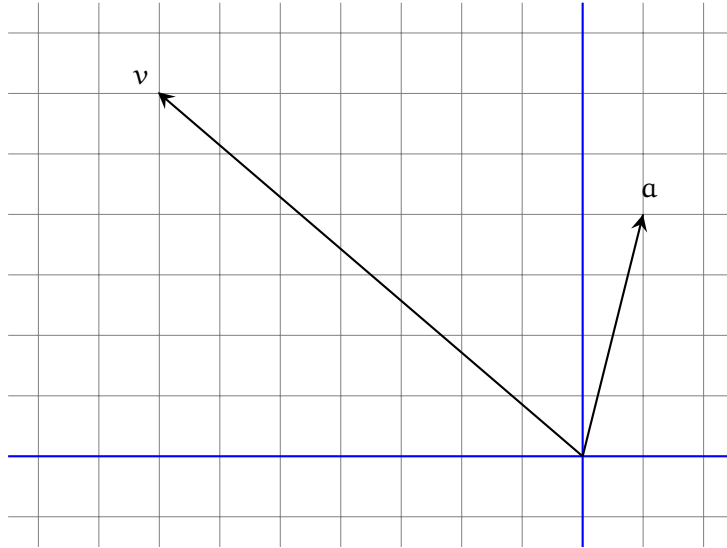
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{4}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{b}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2}{7}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 12 \\ 2 & 7 & 17 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -13 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & 4 & -13 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 8 JDA.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

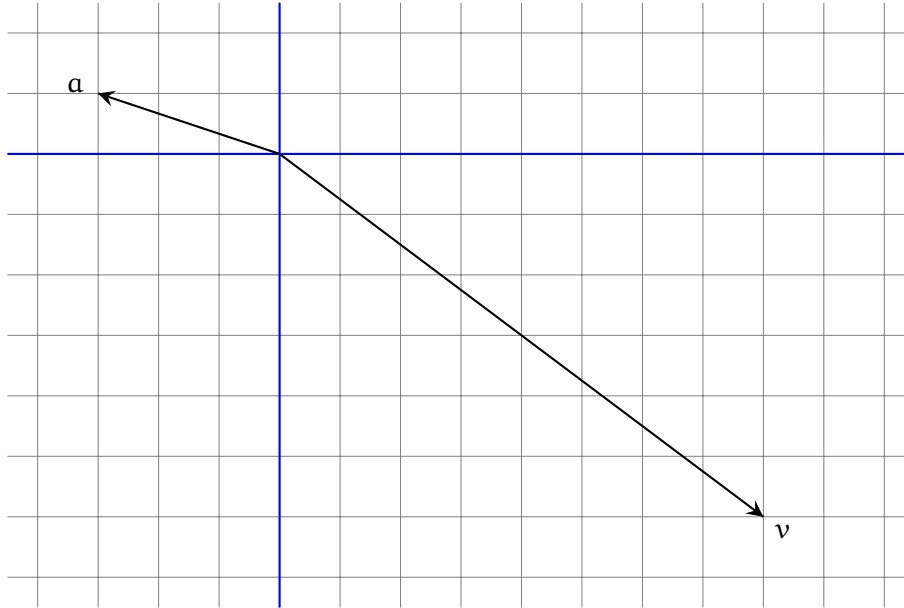
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{3}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{b}_1}{4}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - 9\mathbf{b}_1 + 9\mathbf{b}_2}{8}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ -19 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 13 \\ 2 & 7 & 3 \\ -4 & -2 & -19 \\ -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -17 \\ -21 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & -6 & -17 \\ -3 & 0 & -21 \\ 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 9 MCFF.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

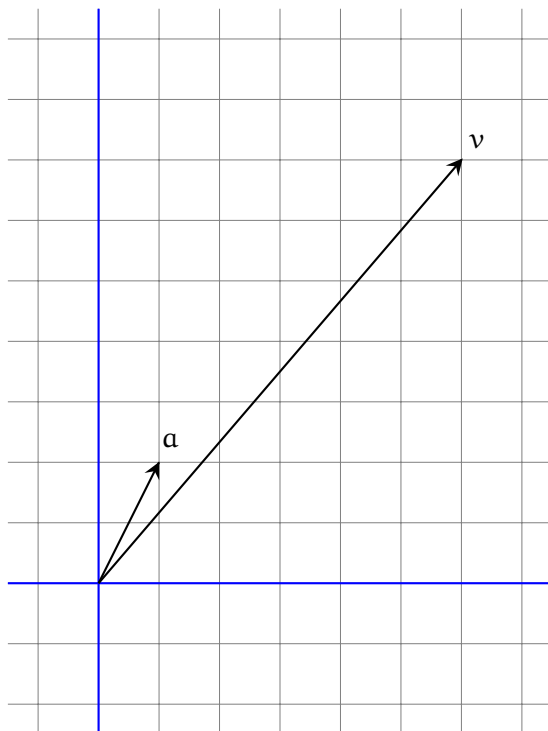
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{5}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{b}_1}{2}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1 - 9\mathbf{b}_2}{3}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -11 \\ -7 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & -11 \\ 1 & 3 & -7 \\ 2 & -4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 27 \\ 17 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 27 \\ -1 & 4 & 17 \\ 3 & 4 & 11 \\ 1 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 10 MLLF.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -10 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

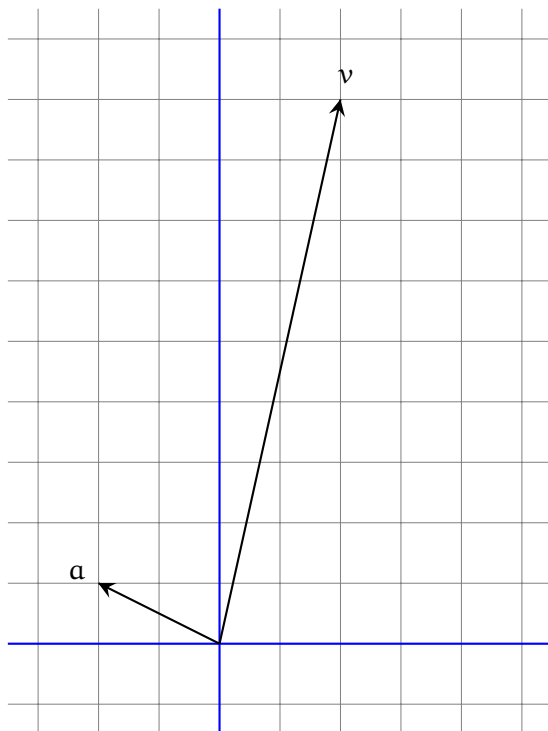
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{6}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 9\mathbf{b}_1}{8}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - 4\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2}{7}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ -3 & 8 & 24 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 11 OHCI.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

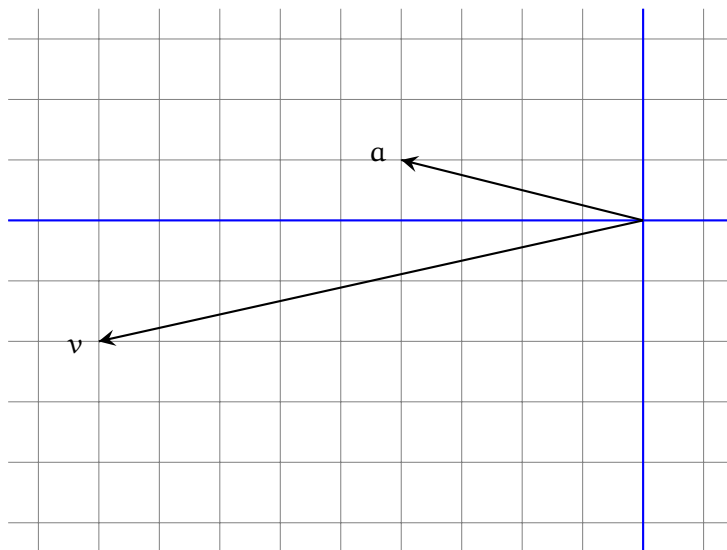
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 7\mathbf{b}_1}{3}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 5\mathbf{b}_1 + 7\mathbf{b}_2}{8}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \\ -29 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \\ -5 & -9 & -29 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -17 \\ 17 \\ -21 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -17 \\ -5 & 6 & 17 \\ 1 & 4 & -21 \\ 1 & -4 & 13 \end{bmatrix}.$$



Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 12 SSEA.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

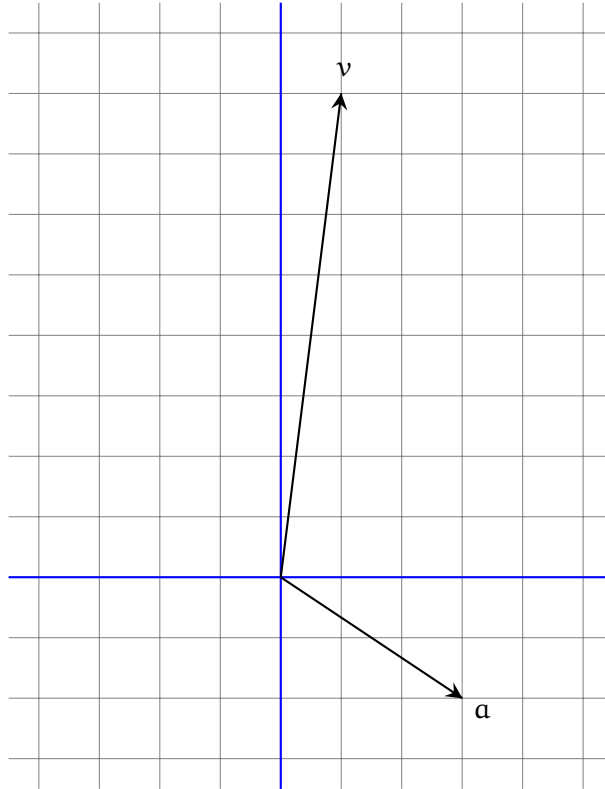
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{6}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 8\mathbf{b}_1}{7}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - 3\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2}{2}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -14 \\ 10 \\ -19 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -14 \\ 4 & 6 & 10 \\ -4 & -2 & -19 \\ 1 & -3 & 24 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & 11 \\ -1 & 6 & 13 \\ 5 & -6 & 13 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 13 VCDM.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

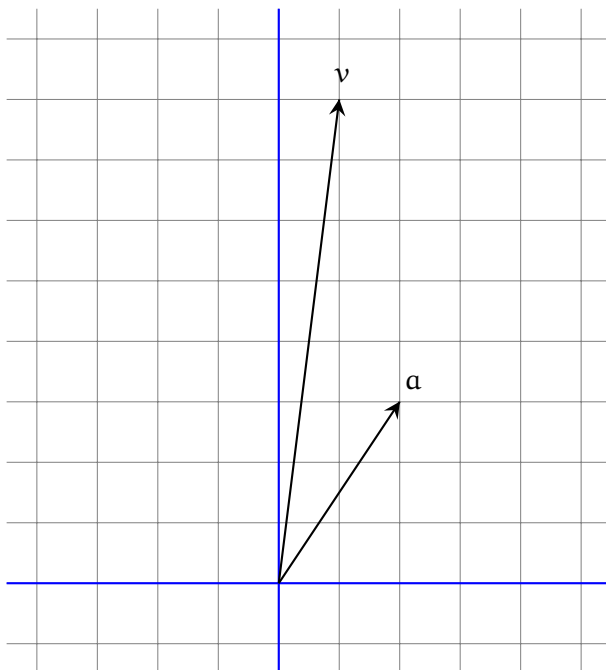
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -10 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{4}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{b}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 8\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2}{7}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 22 \\ 2 \\ 19 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 22 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 19 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ -14 \\ 24 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram-Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 1 & 6 & -14 \\ 5 & 4 & 24 \\ -1 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$



**Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 14.**

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

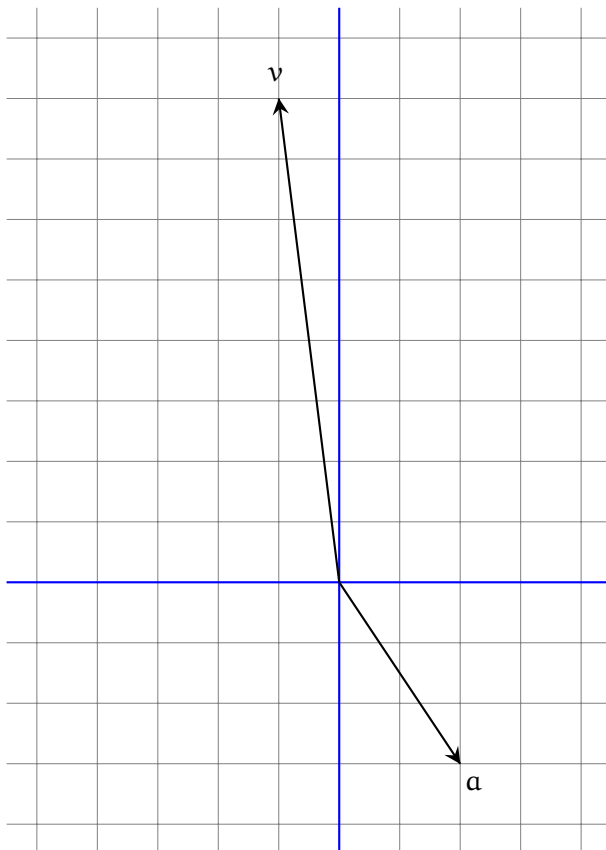
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{3}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 4\mathbf{b}_1}{5}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 7\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2}{9}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 15 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 11 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ -2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 20 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix}.$$



Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 15.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

- III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

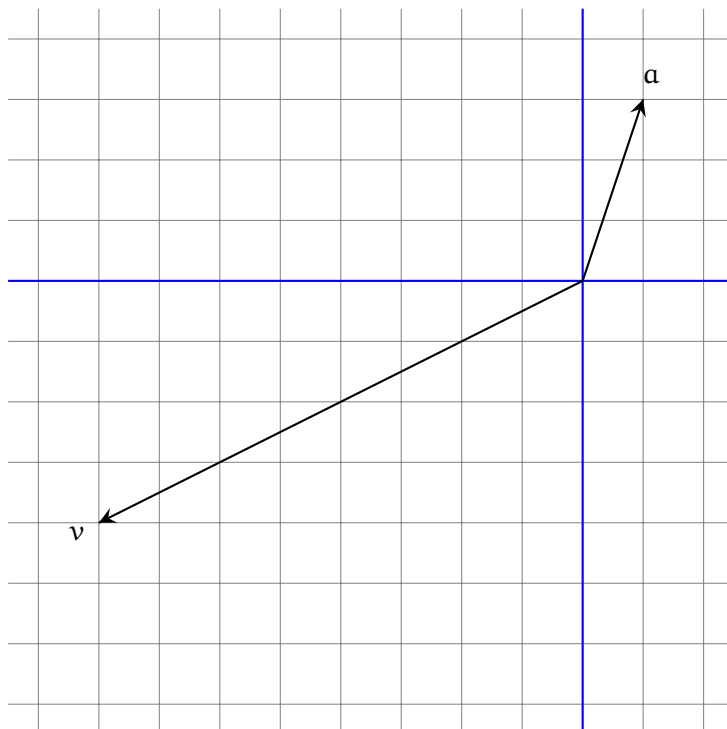
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{b}_1}{6}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 7\mathbf{b}_1 - 7\mathbf{b}_2}{3}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -27 \\ -11 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -27 \\ -2 & 3 & -11 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ -3 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -13 \\ 5 & 4 & -3 \\ -3 & -4 & 7 \\ 1 & 6 & -13 \end{bmatrix}.$$



Análisis Numérico I, Licenciatura en Física y Matemáticas.
Tarea, abril del 2017. Variante 16.

Ortogonalización. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 1 %.

Rotación de Givens. Encuentre una matriz R de la forma indicada abajo que transforme el vector dado v en un múltiplo positivo del vector básico e_1 :

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad c^2 + s^2 = 1, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Compruebe las igualdades $c^2 + s^2 = 1$ y $Rv = \|v\|_2 e_1$.

Ejercicio 2. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras–Parseval:

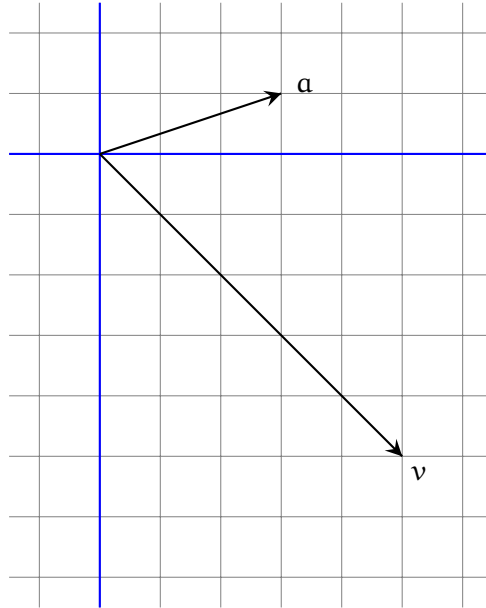
$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 1 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 1 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.

II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .

III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 5. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 6. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 7. 1 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 1 %.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 4\mathbf{b}_1}{3}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_1 - 8\mathbf{b}_2}{6}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 9. 2%.

Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -22 \\ -2 \\ -13 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 9 & -22 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -13 \\ 2 & -4 & 15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 2%.

Aplique el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt** a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ forman una lista ortonormal calcule su matriz de Gram $G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -20 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 2%.

Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^T Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & -20 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$