Descomposición en valores singulares, demostración de existencia

Objetivos. Demostrar que para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ existe una descomposición en valores singulares.

Requisitos. Norma matricial asociada a la norma euclidiana de vectores, matrices unitarias y bases ortonormales.

1. Norma matricial asociada a la norma euclidiana de vectores (repaso). Dado un vector $v \in \mathbb{C}^n$, denotamos por $\|v\|$ a su norma euclidiana:

$$\|v\| \coloneqq \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, denotamos por $\|A\|$ a su norma como operador lineal $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$:

$$\|A\| \coloneqq \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n\\ \|v\|=1}} \|Av\|.$$

De la compacidad de la esfera unitaria en $\mathbb{C}^n$ se sigue que el supremo en esta fórmula se alcanza, esto es, existe un $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|v\| = 1$ y $\|Av\| = \|A\|$.

2. Completación de una lista ortonormal a una base ortonormal. Dada una lista ortonormal $a_1, \ldots, a_m$ en $\mathbb{C}^n$, existen vectores $a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ tales que $a_1, \ldots, a_n$ es una base ortonormal en $\mathbb{C}^n$. El enunciado se puede demostrar, por ejemplo, con ayuda de la ortogonalización de Gram–Schmidt.

3. Lema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, donde $m \geq 1$, $n \geq 1$. Entonces existen matrices unitarias $U_1 \in \mathcal{U}_m(\mathbb{C})$, $V_1 \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ tales que el producto $U_1^* A V_1$ es de la forma

$$U_1^* A V_1 = \left[\begin{array}{c|c} \|A\| & \mathbf{0}_{n-1}^* \\ \hline \mathbf{0}_{m-1} & B \end{array} \right],$$

donde $B \in \mathcal{M}_{(m-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$.

Demostración. De la definición de $\|A\|$ y de la compacidad de la esfera unitaria en $\mathbb{C}^n$ se sigue que existe un vector $v_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\|v_1\| = 1$ y $\|Av_1\| = \|A\|$. Escribimos Av_1 como $\|A\|\, u_1$, donde $u_1 \in \mathbb{C}^m$ y $\|u_1\| = 1$. Completamos el vector v_1 a una base ortonormal $v_1, \ldots, v_n$ en $\mathbb{C}^n$ y completamos el vector u_1 a una base ortonormal $u_1, \ldots, u_m$ en $\mathbb{C}^m$. Denotamos por U_1 a la matriz formada de las columnas $u_1, \ldots, u_m$, y por V_1 a la matriz formada de las columnas $v_1, \ldots, v_n$:

$$U_1 = \big[u_1, \ldots, u_m\big], \qquad V_1 = \big[v_1, \ldots, v_n\big].$$

Entonces $U_1 \in \mathcal{U}_m(\mathbb{C})$ y $V_1 \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. Además, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\big(U_1^* A V_1\big)_{j,1} = u_j^* \big(AV_1\big)_{*,1} = u_j^* A v_1 = u_j^* \big(\|A\| u_1\big) = \|A\| \delta_{j,1},$$

esto es, la matriz $U_1^* A V_1$ es de la forma

$$U_1^* A V_1 = \left[\begin{array}{c|c} \|A\| & w^* \\ \hline \mathbf{0}_{m-1} & B \end{array}\right],$$

donde $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $B \in \mathcal{M}_{(m-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$. Nos falta demostrar que $w = \mathbf{0}_{n-1}$. La demostración está basada en la definición de la norma matricial y en el hecho que las matrices unitarias preservan normas de vectores. Consideremos el vector auxiliar

$$x \coloneqq V_1 \begin{bmatrix} \|A\| \\ w \end{bmatrix}.$$

Como la multiplicación por matrices unitarias no cambia la norma euclidiana de vectores,

$$\|x\| = \left\| \begin{bmatrix} \|A\| \\ w \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|A\|^2 + \|w\|^2}.$$

Además,

$$Ax = U_1 \left[\begin{array}{c|c} \|A\| & w^* \\ \hline \mathbf{0}_{m-1} & B \end{array}\right] \begin{bmatrix} \|A\| \\ w \end{bmatrix} = U_1 \begin{bmatrix} \|A\|^2 + \|w\|^2 \\ Bw \end{bmatrix},$$

y

$$\|Ax\| \geq \|A\|^2 + \|w\|^2.$$

Resumiendo,

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|A\|^2 + \|w\|^2}{\sqrt{\|A\|^2 + \|w\|^2}} = \sqrt{\|A\|^2 + \|w\|^2}.$$

Por otro lado, de la definición de la norma de la matriz A se sigue que

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

De la desigualdad

$$\sqrt{\|A\|^2 + \|w\|^2} \leq \|A\|$$

concluimos que $\|w\| = 0$ y $w = \mathbf{0}_{n-1}$. $\square$

4. Teorema (existencia de una descomposición en valores singulares). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Entonces existen matrices unitarias $U \in \mathcal{U}_m(\mathbb{C})$, $V \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ tales que el producto $U^* A V^*$ es de la forma

$$\operatorname{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r),$$

donde $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

Demostración. Inducción sobre $\min\{m, n\}$, utilizando el lema anterior y el hecho que la matriz del lema anterior tiene propiedad $\|B\| \leq \|A\|$. $\square$