Ejemplo de descomposición en valores singulares de una matriz 2×3

1. Problema. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Buscamos su descomposición en valores singulares, esto es, una terna de matrices (U, S, V) tal que

$$A = USV^\top, \tag{1}$$

U es una matriz ortogonal 2×2, V es una matriz ortogonal 3×3, y S es de la forma

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $s_1 \geq s_2 \geq 0$.

2. La matriz $\boldsymbol{A^\top A}$ y su descomposición en valores propios. Si U, S, V son matrices con las propiedades indicadas arriba, entonces

$$A^\top = VS^\top U^\top.$$

Para la matriz $B \coloneqq A^\top A$ obtenemos la siguiente descomposición:

$$B = A^\top A = (VS^\top U^\top)(USV^\top) = V \operatorname{diag}(s_1^2, s_2^2, 0) V^\top.$$

Por lo tanto, los números s_1^2, s_2^2 y 0 deben ser valores propios de $A^\top A$ y las columnas de V deben ser vectores propios correspondientes (normalizados). Calculemos la matriz B y su polinomio característico:

$$B = A^\top A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+4 & -3+2 & 6-6 \\ -3+2 & 1+1 & -2-3 \\ 6-6 & -2-3 & 4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 13 \end{bmatrix},$$

Para calcular el polinomio característico de la matriz B, consideremos el determinante de la matriz $\lambda I_3 - B$ y apliquemos operaciones elementales y la expansión por renglons o columnas casi nulos:

$$C_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 13 & -5 & 0 \\ -5 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 13 \end{vmatrix} \overset{R_3 += -(\lambda-13)R_2}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda - 13 & -5 & 0 \\ -5 & \lambda - 2 & 1 \\ 5\lambda - 65 & -\lambda^2 + 15\lambda - 25 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \lambda - 13 & -5 \\ 5\lambda - 65 & -\lambda^2 + 15\lambda - 25 \end{vmatrix} = -(\lambda - 13) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 5 & -\lambda^2 + 15\lambda - 25 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda - 13)(-\lambda^2 + 15\lambda - 25 + 25) = \lambda(\lambda - 13)(\lambda - 15).$$

Los valores propios de la matriz B son

$$\lambda_1(B) = 15, \qquad \lambda_2(B) = 13, \qquad \lambda_3(B) = 0.$$

Los valores singulares de la matriz A son

$$s_1(A) = \sqrt{15}, \qquad s_2(A) = \sqrt{13}, \qquad s_3(A) = 0.$$

Construyamos algunos vectores propios de B. Simplificamos la matriz $\lambda_1(B)I_3 - B$ con operaciones elementales por renglones y hallamos un vector normalizado perteneciente a su espacio nulo:

$$15I_3 - B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 += -15R_3]{R_1 += 5R_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ -5 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 += 5R_1]{R_1 *= 1/5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallamos un vector normalizado perteneciente al espacio nulo de la matriz $15I_3 - B$:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Simplificamos la matriz $13I_3 - B$ con operaciones elementales por renglones y construimos un vector normalizado en su núcleo:

$$15I_3 - B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

En vez de la matriz $0I_3 - B$ trabajamos con la matriz B (que tiene el mismo núcleo), y la simplificamos usando operaciones elementales por renglones:

$$B = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 += 5R_3 \\ R_2 += 2R_3 \\ R_3 *= -1}} \begin{bmatrix} 13 & 065 & \\ 5 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 += -5R_1]{R_1 *= 1/13} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix}.$$

Construimos un vector normalizado en su núcleo:

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{195}} \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Formamos la matriz V de las columnas v_1, v_2, v_3:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{195}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{13}{\sqrt{195}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{195}} \end{bmatrix}.$$

3. Cálculo de los vectores $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$. Sabemos que

$$Av_1 = s_1 u_1, \qquad Av_2 = s_2 u_2.$$

Calculamos Av_1 y Av_2:

$$\begin{aligned}
Av_1 &= \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 15+2-2 \\ 10+2+3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
Av_2 &= \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 3+0+10 \\ 2+0-15 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo s_1 y s_2 calculamos u_1 y u_2:

$$u_1 = \frac{1}{s_1} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{s_2} Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Formamos la matriz U de las columnas u_1 y u_2:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Respuesta. $A = USV^\top$, donde

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{13} & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{195}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{13}{\sqrt{195}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{195}} \end{bmatrix}.$$

Al final se debe hacer la comprobación de las siguientes igualdades:

$$U^\top U = I_2, \qquad V^\top V = I_3, \qquad AV = US.$$