Ejemplo de descomposición en valores singulares de una matriz 2×2

1. Problema. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Buscamos su descomposición en valores singulares, esto es, una terna de matrices U, Σ, V, tal que

$$A = U\Sigma V^\top, \tag{1}$$

donde U y V deben ser matrices ortogonales 2×2 y Σ debe ser de la forma

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix},$$

donde $s_1 \geq s_2 \geq 0$.

2. Las imágenes de las columnas de V. Supongamos que U, Σ, V tienen propiedades indicadas arriba. Notemos que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = s_1 E_{1,1} + s_2 E_{2,2}.$$

Además

$$E_{j,j} = e_j e_j^\top,$$

así que

$$U E_{j,j} V^\top = U e_j e_j^\top V^\top = (U e_j)(V e_j)^\top = U_{*,j} V_{*,j}^\top.$$

Denotando las columnas de U por u_1, u_2 y las columnas de V por v_1, v_2 obtenemos otra forma de la descomposición en valores singulares:

$$A = s_1 u_1 v_1^\top + s_2 u_2 v_2^\top. \tag{2}$$

Recordando que los vectores v_1, v_2 forman base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ y aplicando la fórmula (2), obtenemos

$$A v_1 = s_1 u_1, \qquad A v_2 = s_2 u_2. \tag{3}$$

3. La matriz $A^\top A$ y su descomposición en valores propios. Si U, Σ, V son matrices con las propiedades indicadas arriba, entonces

$$A^\top = V \Sigma U^\top$$

y

$$A^\top A = V \Sigma^2 V^\top.$$

Esto implica que los números s_1^2 y s_2^2 deben ser valores propios de $A^\top A$ y las columnas de V deben ser vectores propios correspondientes (normalizados). Calculemos la matriz $A^\top A$ y su polinomio característico:

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 50 & 40 \\ 40 & 50 \end{bmatrix}, \qquad C_{A^\top A}(\lambda) = \lambda^2 - 100\lambda + 900 = (\lambda - 90)(\lambda - 10).$$

Por lo tanto los valores propios de la matriz $A^\top A$ son

$$\lambda_1(A^\top A) = 90, \qquad \lambda_2(A^\top A) = 10,$$

y los valores singulares de la matriz A son

$$s_1(A) = 3\sqrt{10}, \qquad s_2(A) = \sqrt{10}.$$

Construyamos algunos los vectores propios normalizados de $A^\top A$:

$$90I_2 - A^\top A = \begin{bmatrix} 40 & -40 \\ -40 & 40 \end{bmatrix}, \qquad\qquad v_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

$$10I_2 - A^\top A = \begin{bmatrix} -40 & -40 \\ -40 & -40 \end{bmatrix}, \qquad\qquad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

4. Cálculo de los vectores $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$. Por las fórmulas (3),

$$s_1 u_1 = A v_1 = \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad s_2 u_2 = A v_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo s_1 y s_2 calculamos u_1 y u_2:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

5. Respuesta del problema. Formamos las matrices Σ, U, V usando la información de arriba:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

6. Comprobación que las columnas de $\boldsymbol{U}$ son vectores propios de $\boldsymbol{AA^\top}$. Da la fórmula (1) obtenemos

$$AA^\top = U\Sigma^2 U^\top,$$

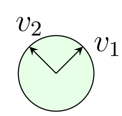
así que los números s_1, s_2 deben ser los valores propios de $AA^\top$ y los vectores u_1, u_2 deben ser los vectores propios asociados. Hagamos la comprobación:

$$AA^\top = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix},$$

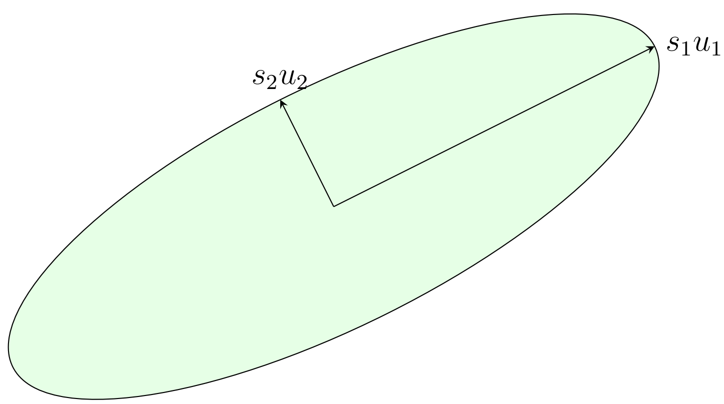
$$AA^\top u_1 = \begin{bmatrix} 36\sqrt{5} \\ 18\sqrt{5} \end{bmatrix} = 90 \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} = s_1^2 u_1, \qquad \checkmark$$

$$AA^\top u_2 = \begin{bmatrix} -2\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} = s_2^2 u_2. \qquad \checkmark$$

7. La imagen de la bola unitaria. Geométricamente, la transformación lineal $x \mapsto Ax$ transforma la bola unitaria



en la elipse cuyos semiejes tienen longitudes s_1 y s_2:



Al dividir la longitud del semieje mayor entre la longitud del semieje menor obtenemos el número de condicionamiento de la matriz A con respecto a la norma matricial asociada a la norma euclidiana de vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$\varkappa_2(A) = \frac{s_1}{s_2} = 3.$$