# Matrices de simétricas de banda

Estos apuntes están escritos por Eduardo Camps Moreno, ???, ???, con ayuda de Egor Maximenko.

# Índice



Una matriz cuadrada simétrica $A$ se llama *matriz de banda* de ancho $2w-1$, si para cualesquiera $j,k\in\{1,\ldots,n\}$, si $|j-k|\ge w$, entonces $A_{j,k}=0$. Por ejemplo, si $n=7$ y $w=3$, entonces la matriz es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{?,?} & 0 & 0 & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{?,?} & A_{?,?} & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Vamos a guardar las entradas diagonales en un arreglo de tamaño $w\times n$. Por ejemplo, a la matriz

$$B=\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} & B_{1,6} & B_{1,7} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} & B_{2,6} & 0 \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le corresponde la matriz completa

$$A=\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{2,1} & B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & 0 & 0 & \\ B_{3,1} & B_{2,2} & B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & B_{3,2} & B_{2,3} & B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}. \tag{1}$$

# 1. Generación de una matriz simétrica de banda en la forma completa

Primero vamos a hacerlo trabajando por entradas. Este algoritmo no es eficiente en el lenguaje de MATLAB, pero se traduce fácilmente a lenguajes de tipo C, Fortran, Java, etc., que no tienen operaciones para trabajar con renglones y columnas.

**Algoritmo 1** (generación de una matriz simétrica de banda en la forma completa, trabajando por entradas)**.** Dada una matriz $B \in \mathcal{M}_{w\times n}(\mathbb{R})$, la la siguiente función construye la matriz $A$, como en la fórmula (1).

```
function A = SymmetricBandToComplete(B),
  [w, n] = size(B);
  A = zeros(n);
  for j = 1 : n,
    for k = 1 : n,
      result(j, k) = ???;
    endfor
  endfor
endfunction
```

**Prueba 1.** Por ejemplo, si

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 6 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Luego hay que escribir una versión más eficiente de este algoritmo, usando posibilidades del lenguaje de MATLAB.

# 2. Multiplicación de una matriz simétrica de banda por un vector

**Algoritmo 2.** multiplicación de una matriz simétrica de banda por un vector Dada una matriz $B \in \mathcal{M}_{w\times n}(\mathbb{R})$ y un vector $x \in \mathbb{R}^n$, la siguiente función calcula el producto $Ax$, donde $A$ es la matriz completa corresponde a la matriz $B$. La matriz $A$ no se construye en la forma completa.

```
function y = MulSymmBandByVector(B, x),
  [w, n] = size(B);
  y = zeros(n);
  for j = 1 : w,
    for k = 1 : n,
      ???
    endfor
  endfor
endfunction
```