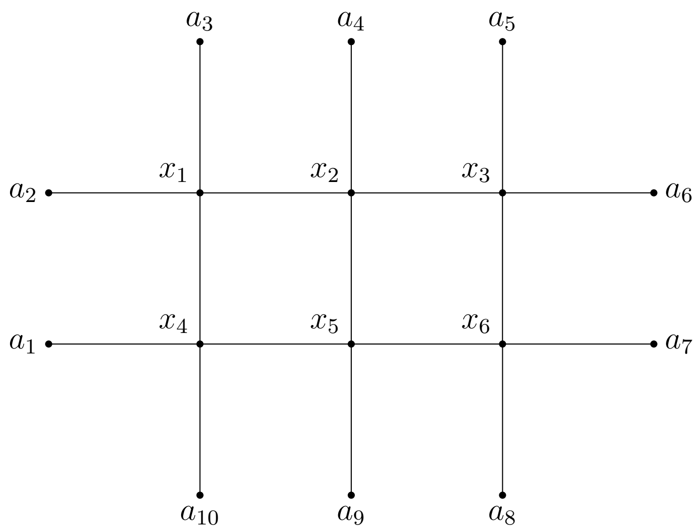
Matrices de Laplace–Dirichlet asociadas a las mallas rectangulares

Estos apuntes están escritos por Daniel Hernández León, con ayuda de Egor Maximenko.

Ejemplo 2×3

Consideremos el problema de calor sobre una malla rectangular 2×3 ($p = 2$, $q = 3$):



En cada uno de los nodos x_j consideramos la ecuación discretizada de Laplace (la ecuación de calor). Se busca una solución estancionaria, cuando los valores x_j no dependen del tiempo. Por ejemplo, en el nodo x_1 la ecuación será

$$(x_1 - a_2) + (x_1 - a_3) + (x_1 - x_2) + (x_1 - x_4) = 0.$$

Los números a_k están dados, y los pasamos al lado derecho de la ecuación:

$$4x_1 - x_2 - x_4 = a_2 + a_3.$$

Procediendo de esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para las incógnitas $x_1, \ldots, x_6$:

$$\begin{aligned}
4x_1 - x_2 - x_4 &= a_2 + a_3, \\
4x_2 - ??? &= ???, \\
4x_3 - ??? &= ???, \\
4x_4 - ??? &= ???, \\
4x_5 - ??? &= ???, \\
4x_6 - ??? &= ???.
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial. Ahora nos fijamos solamente en la matriz del sistema. La matriz es cuadrada y de orden $n = 6$:

$$A^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Para entender la construcción de la matriz, es más cómodo fijarse no en los nodos de la malla, sino en las aristas. Por ejemplo, la arista que une los nodos x_1 y x_4 corresponde a los sumandos $x_1 - x_4$ en la primera ecuación y a los sumandos $x_4 - x_1$ en la cuarta ecuación. En otras palabras, la arista $\{1, 4\}$ hace la siguiente contribución a la matriz:

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La arista $\{2, 3\}$ hace la siguiente contribución a la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La arista que une los nodos x_1 y a_2 hace la siguiente contribución a la matriz:

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al sumar las matrices de esta forma que corresponden a todas las aristas, se obtiene (1).

Ejemplo 4×3

Para $p = 4$ y $q = 3$ la malla es

(hay que copiar y modificar el dibujo anterior)

La matriz de Laplace–Dirichlet es

$$A^{(4,3)} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Función que construye la matriz en el caso general $p \times q$

```
function [A] = rectangular_lattice(p, q),
   n = ???;
   A = zeros(n, n);
   ???
end
```

Para $p = 2$, $q = 3$ la función regresa la matriz (1), y para $p = 4$, $q = 3$ la función regresa la matriz (2).