Matrices de rotación de orden 2

Estos apuntes están escritos por Maria de los Angeles Isidro Pérez y Egor Maximenko.

Objetivos. Definir la matriz de rotación y estudiar sus propiedades principales.

Requisitos. Funciones trigonométricas, identidades trigonométricas, matrices ortogonales, expresión del producto punto en $\mathbb{R}^2$ en términos de la multiplicación de matrices.

Definición de la matriz de rotación de orden 2. Para todo $\theta \in \mathbb{R}$,

$$R_\theta \coloneqq \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

1. Imágenes de los vectores básicos bajo la rotación. Denotemos por e_1 y e_2 a los elementos de la base canónica en $\mathbb{R}^2$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

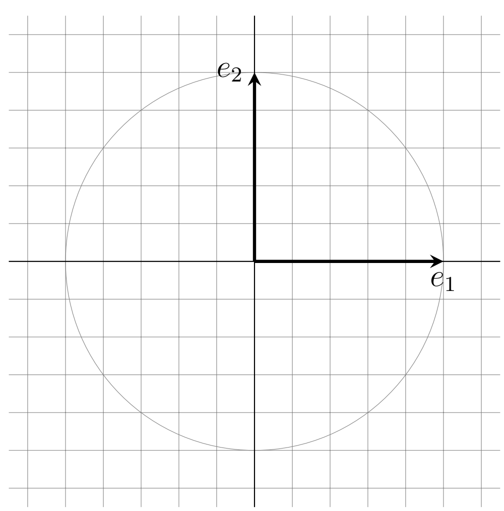
Calcule $R_\theta e_1$ y $R_\theta e_2$:

$$R_\theta e_1 = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad R_\theta e_2 = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

2. Valores de $\cos\frac{\pi}{3}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$. Escriba los siguientes valores en forma exacta (con radicales, si es necesario) y sus aproximaciones decimales:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \qquad = 0.\underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \qquad = 0.\underbrace{\qquad}_{?}.$$

3. Dibujo: imágenes de los vectores básicos bajo $\boldsymbol{R_\theta}$ con $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$. Dibuje en el plano los vectores $R_\theta e_1$ y $R_\theta e_2$ para $\theta = \frac{\pi}{3}$.



4. Fórmulas trigonométricas principales (repaso).

$$\cos(\alpha+\beta) =$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) =$$

5. Paridad de las funciones trigonométricas.

$$\cos(-\alpha) = \qquad\qquad, \qquad\qquad \operatorname{sen}(-\alpha) = \qquad\qquad .$$

6. Producto de matrices de rotación. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcule el producto $R_\alpha R_\beta$:

$$R_\alpha R_\beta = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

7. Rotación en el ángulo cero. Escriba la matriz R_0:

$$R_0 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

8. Rotación en el ángulo inverso. La matriz

$$R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

tiene la propiedad

$$R_\alpha R_{-\alpha} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad R_{-\alpha} R_\alpha = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Rotación como una matriz ortogonal

9. La transpuesta a la matriz de rotación.

$$R_\theta^\top = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

10. Toda matriz de rotación es ortogonal. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Calcule los productos:

$$R_\theta^\top R_\theta =$$

$$R_\theta R_\theta^\top =$$

11. Expresión del producto punto en $\mathbb{R}^2$ en términos de la multiplicación de matrices (repaso). Sean $a, b \in \mathbb{R}^2$:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Escriba el producto interno canónico en $\mathbb{R}^2$ (llamado también producto punto) en forma explícita:

$$\langle a, b \rangle \; = \; a \cdot b \; =$$

Escriba los siguientes productos:

$$a^\top b = \begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \qquad\qquad, \qquad b^\top a = \begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \qquad\qquad.$$

Resumen:

$$\langle a, b \rangle =$$

12. Expresión de la norma euclidiana en términos del producto interno (repaso). Sea $a \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\|a\|^2 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

13. La transpuesta del producto (repaso). Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces

$$(AB)^\top = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

14. La rotación preserva los productos internos. Sean $a, b \in \mathbb{R}^2$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifique el siguiente producto interno:

$$\langle R_\theta a, R_\theta b \rangle \; = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \langle \underbrace{\quad}_{?}, \underbrace{\quad}_{?} \rangle.$$

15. La rotación preserva las normas. Sea $a \in \mathbb{R}^2$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifique la siguiente expresión:

$$\|R_\theta a\|^2 \; = $$

Resumen:

$$\|R_\theta a\| \; = \qquad\qquad .$$

Transformación lineal asociada a $\boldsymbol{R_\theta}$. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número fijo. Vamos a considerar la transformación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociada a la matriz R_θ de la siguiente manera:

$$f(x) \coloneqq R_\theta x.$$

Es común identificar la función f con la matriz R_θ.

16. El núcleo de la rotación. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número fijo. Resuelva la ecuación $R_\theta x = \mathbf{0}_2$, donde

$$\mathbf{0}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

17. La imagen (el conjunto de los valores) de la rotación. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número fijo. ¿Para qué vectores $b \in \mathbb{R}^2$ la ecuación $R_\theta x = b$ tiene una solución?.

18. La inyectividad y suprayectividad de la rotación. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. ¿Qué propiedades posée la transformación lineal asociada a la matriz R_θ?. Elija la opción correcta:

○ puede ser que no es inyectiva ni suprayectiva;

○ siempre es inyectiva y suprayectiva;

○ es inyectiva, pero no necesariamente suprayectiva;

○ es suprayectiva, pero no necesariamente inyectiva.