

Programación: reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio

Objetivos. Programar una función que calcule la reflexión ortogonal de un vector respecto al hipersubespacio determinado por un vector no nulo.

Requisitos. Programación de funciones, producto punto de dos vectores.

1. Proyección ortogonal de un vector sobre una recta (repaso). Sean $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un único par de vectores $u, w \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u \in \ell(a), \quad w \perp a, \quad v = u + w.$$

Recuerde fórmulas para u y w :

$$\lambda = \frac{v \cdot a}{a \cdot a}, \quad u = \lambda a, \quad w = v - u$$

2. Matriz de la proyección ortogonal. Denotemos el vector u del ejercicio anterior por $P_a v$. Escriba $P_a v$ en forma

$$P_a v = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} v.$$

Escriba la matriz P_a :

$$P_a =$$

3. Definición de la reflexión ortogonal. Recordamos que el conjunto $\{a\}^\perp$ es hipersubespacio en \mathbb{R}^n , esto es, un subespacio de dimensión $n - 1$. El vector w pertenece a este subespacio y es su elemento más cercano al punto v . Ahora definimos $x \in \mathbb{R}^n$ mediante la ecuación

$$x - w = w - v.$$

El vector x es la *reflexión ortogonal* del vector v respecto al hipersubespacio $\{a\}^\perp$, lo denotamos por $H_a v$. Expresar $H_a v$ en términos de w y v , luego en términos de a y v :

$$H_a v =$$

Escriba $H_a v$ en forma

$$H_a v = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} v.$$

Expresar la matriz H_a en términos de I_n y P_a , luego directamente en términos de a :

$$H_a =$$

Por supuesto, para calcular el vector $H_a v$, no es necesario construir la matriz H_a .

4. Problema: reflexión ortogonal sobre una recta. En algún lenguaje de programación escribir una función de dos argumentos $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, $v \in \mathbb{R}^n$, que calcule la reflexión ortogonal $H_a(v)$ del vector v respecto al hipersubespacio $\{a\}^\perp$.

Entrada: $a, v \in \mathbb{R}^n$.

Salida: el vector $H_a(v)$.

El esquema de una solución de este ejercicio en el lenguaje de MATLAB (guardar en el archivo `orthreflexion.m`):

```
function x = orthreflexion(a, v),
    lambda = (a' * v) / ???;
    x = ???;
end
```

5. Pruebas con vectores pequeños. Probar la función programada en el ejercicio anterior con pequeños ejemplos. Verificar las siguientes propiedades:

$$a \perp (H_a v - v), \quad \|H_a v\| = \|v\|.$$

Solución en el lenguaje de MATLAB (guardar en el archivo `test1orthproj.m`):

```
function [] = test1orthreflexion(),
    a = [2; -1; 3; -2];
    v = [5; 1; 6; -1];
    x = orthreflexion(a, v);
    display(a' * (x + v));
    display([norm(v), norm(x)]);
end
```

6. Pruebas con vectores largos pseudoaleatorios.

```
function [] = test2orthreflexion(),
    n = 1000;
    a = 2 * rand(n, 1) - ones(n, 1);
    v = 2 * rand(n, 1) - ones(n, 1);
    x = orthreflexion(a, v);
    display(a' * (x + v));
    display([norm(v), norm(x)]);
end
```