

# Programación: proyección ortogonal de un vector sobre la recta generada por un vector no nulo

**Objetivos.** Programar una función que calcule la proyección ortogonal de un vector sobre la recta generada por un vector no nulo.

**Requisitos.** Programación de funciones, producto punto de dos vectores.

**1. Deducción de la fórmula.** Sean  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ . Encontrar un escalar  $\lambda$  tal que

$$a \perp (v - \lambda a),$$

esto es,

$$a^\top (v - \lambda a) = 0.$$

**2. Descomposición de un vector en la proyección ortogonal y el complemento ortogonal.** Sean  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ . Encontrar vectores  $u, w \in \mathbb{R}^n$  tales que:

1.  $u$  es un múltiplo de  $a$ .
2.  $w \perp a$ .
3.  $v = u + w$ .

En esta situación se dice que  $u$  es la *proyección ortogonal* del vector  $v$  sobre la recta generada por el vector  $a$ .

**3. Identidad de Pitágoras.** Explique por qué las normas de los vectores  $u, w, v$  del ejercicio anterior satisfacen la identidad

$$\|u\|^2 + \|w\|^2 = \|v\|^2.$$

**4. Problema: proyección ortogonal sobre una recta.** En algún lenguaje de programación escribir una función que calcule la proyección ortogonal  $P_a(v)$  de un vector dado  $v \in \mathbb{R}^n$  sobre la recta generada por un vector no nulo  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Entrada:  $a, v \in \mathbb{R}^n$ .

Salida: el vector  $P_a(v)$ .

El esquema de una solución de este ejercicio en el lenguaje de MATLAB (guardar en el archivo `orthproj.m`):

```
function u = orthproj(a, v),
    lambda = (a' * v) / ???;
    u = ???;
end
```

**5. Pruebas con vectores pequeños.** Probar la función programada en el ejercicio anterior con pequeños ejemplos. Verificar que los vectores  $u = P_a(v)$  y  $w = v - u$  tienen las siguientes propiedades:

$$a \perp w, \quad \|u\|^2 + \|w\|^2 = \|v\|^2.$$

Solución en el lenguaje de MATLAB (guardar en el archivo `test1orthproj.m`):

```
function [] = test1orthproj(),
    a = [2; -1; 3; -2];
    v = [5; 1; 6; -1];
    u = orthproj(a, v);
    w = v - u;
    display(a' * w);
    display([u' * u + w' * w, v' * v]);
end
```

**6. Pruebas con vectores largos pseudoaleatorios.**

```
function [] = test2orthproj(),
    n = 1000;
    a = 2 * rand(n, 1) - ones(n, 1);
    v = 2 * rand(n, 1) - ones(n, 1);
    u = orthproj(a, v);
    w = v - u;
    display(a' * w);
    display([u' * u + w' * w, v' * v]);
end
```