Programación: propiedades de direcciones y residuos en el método del gradiente conjugado

Objetivos. Verificar con ejemplos que en el método del gradiente conjugado las direcciones son A-ortogonales entre si, y cada residuo es ortogonal a las direcciones anteriores y a los residuos anteriores.

Requisitos. Método de gradiente conjugado, producto interno asociado a una matriz.

1. Algoritmo (método del gradiente conjugado con memoria).

```
function [x, s, ps, rs] = conjgradmem(A, b, tol, smax),
   n = length(b); x = zeros(n, 1); r = b; p = r; s = 0;
   rs = zeros(n, smax + 1); ps = zeros(n, smax + 1);
   rs(:, 1) = r; ps(:, 1) = p;
   while ??? && ???,
      q = A * p; al = ???; x = ???; r = ???;
      be = ???; p = r - be * p; s = s + 1;
      rs(:, s) = r; ps(:, s) = p;
   end
   rs = rs(:, 1 : s); ps = ps(:, 1 : s);
end
```

2. Prueba.

```
function [] = test_conjgradmem(),
   n = 5;
   B = 2 * rand(n) - ones(n);
   A = B' * B + 2.016 * eye(n);
   b = 2 * rand(n, 1) - ones(n, 1);
   [x, s, ps, rs] = conjgradmem(A, b, 1.0E-5, n);
   disp('A-products of ps with ps:');
   display(ps' * A * ps);
   disp('products of rs with rs:');
   display(rs' * rs);
   disp('products of rs with ps:');
   display(rs' * ps);
end
```

Denotemos por P a la matriz formada de los vectores p y por R a la matriz formada de los vectores r. Ejecutar el programa que calcula las matrices $P^\top AP$, $R^\top R$ y $R^\top P$. Determinar cuáles de las matrices son diagonales; triangulares superiores; triangulares inferiores. Para no distraerse en las entradas muy pequeñas se puede usar la siguiente construcción:

```
display(abs(ps' * A * ps) > 1.0E-12);
```