Programación: reflexión de Householder

Objetivos. Programar una función que calcule el vector de Householder.

Requisitos. Reflexión ortogonal de un vector respecto al hipersubespacio determinado por un vector no nulo.

Se recomienda deducir las fórmulas antes de la clase práctica.

Repaso: proyección ortogonal, reflexión ortogonal

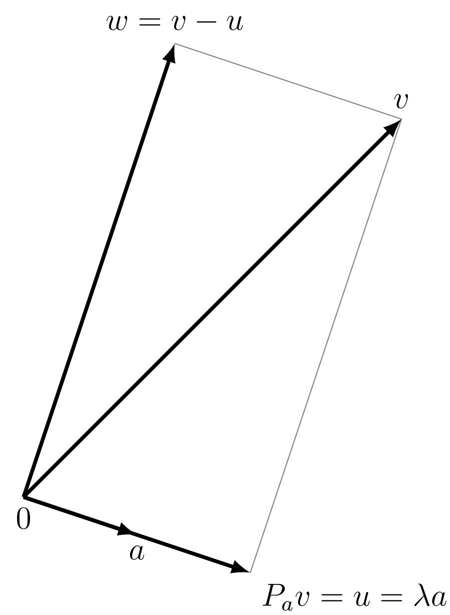
1. Proyección ortogonal de un vector sobre una recta (repaso). Sean $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un único par de vectores $u, w \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u \in \ell(a), \qquad w \perp a, \qquad v = u + w.$$

Recuerde fórmulas para u y w:

$$\lambda = \underline{\hspace{2cm}}, \qquad u = \lambda a, \qquad w =$$

El vector u se denota como $P_a v$.



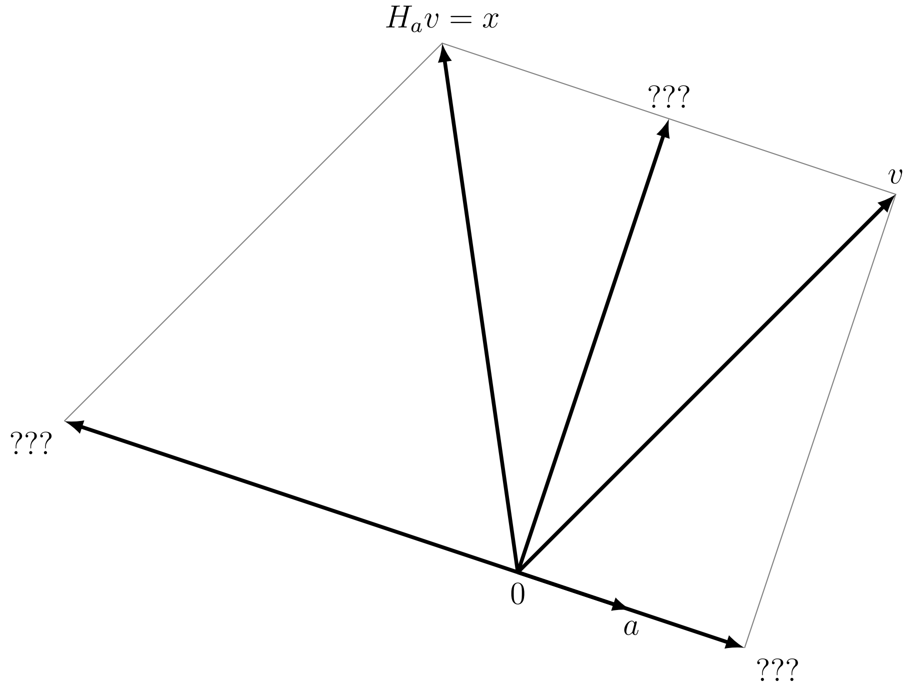
2. Programación de la proyección ortogonal sobre una recta (repaso). En las clases pasadas programamos una función que calcula y regresa el vector $P_a v$:

```
function [u] = orthproj(a, v),
   lambda = (???' * ???) / norm(???) ^ 2;
   u = lambda * a;
end
```

3. Reflexión ortogonal de un vector respecto a un hipersubespacio (repaso). En la notación del ejercicio anterior, denotemos por x al vector que satisface la igualdad

$$x - w = w - v.$$

También denotamos este vector por $H_a v$. En el dibujo ponga los nombres correctos para los vectores ??? y exprese el vector x a través de v y u.



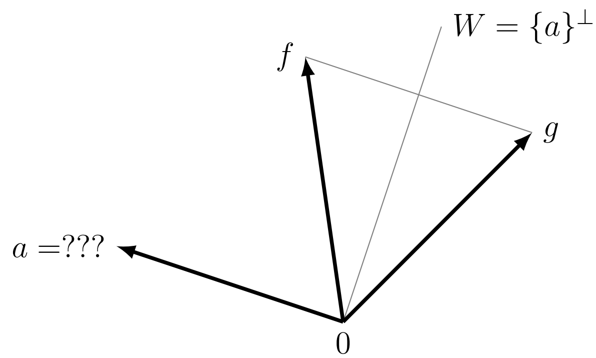
Exprese el vector x en términos de v y w, en términos de v y u, en términos de v y $P_a v$.

$$H_a v = x =$$

4. Programación de la reflexión ortogonal de un vector respecto a un hipersubespacio (repaso). En las clases pasadas programamos una función que calcula y regresa el vector $H_a v$:

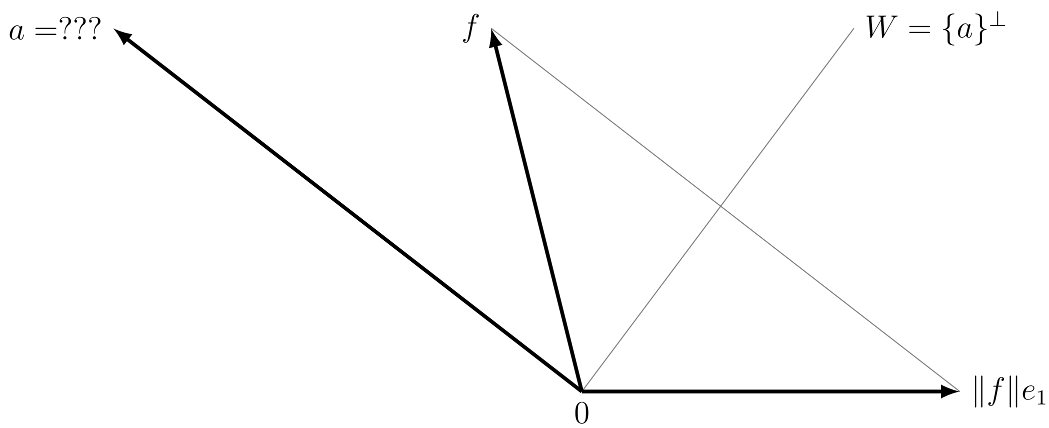
```
function x = orthreflexion(a, v),
   lambda = (a' * v) / ???;
   x = ???;
end
```

5. Idea: transformar un vector en otro vector de la misma longitud por medio de una reflexión ortogonal. El siguiente dibujo muestra dos vectores f y g tales que $\|f\| = \|g\| > 0$ y $f \neq g$. Se ve que el vector g se obtiene del vector f al reflejarlo con respecto a cierto hipersubespacio W. Cada hipersubespacio se puede representar como $\{a\}^\perp$, y falta encontrar a. El vector a mostrado en el dibujo es perpendicular a W. Exprese este vector en términos de f y g.



6. Ejercicio teórico (resolver antes de la clase práctica). Demuestre de manera algebraica que el vector a encontrado en el Ejercicio 5 realmente satisface la igualdad $H_a f = g$. Sugerencia: escriba f y g como combinaciones linales de $f+g$ y $f-g$, calcule $H_a(f+g)$, $H_a(f-g)$ y finalmente $H_a f$.

7. Idea de reflexión de Householder. Sea $f \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que f no es un múltiplo positivo del vector básico e_1, esto es, $f \neq \|f\| e_1$. Usando el siguiente dibujo y la respuesta del Ejercicio 5 encuentre un vector $a \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que $H_a f = \|f\| e_1$.



8. Programar la función que construya el vector de Householder. Escriba una función que calcule y regrese el vector a del Ejercicio 7. Notamos que la suma de la forma $a + \lambda e_1$ se obtiene del vector a al modificar su primera componente.

```
function [a] = householdervector(f),
   a = ???;
   a(1) = a(1) - ???;
end
```

9. Pruebas con vectores pequeños. Haga pruebas de la función `householdervector` usando la función `orthreflexion`.

```
function [] = test1householder(),
   f = [-3; 4];
   a = householdervector(f);
   g = orthreflexion(a, f);
   display(a);
   display(g);
   display([norm(f), norm(g)]);
   display(norm(g(2 : end)));
   display(a' * (f + g));
end
```

10. Pruebas con vectores largos pseudoaleatorios.

```
function [] = test2householder(),
   n = 1000;
   f = randn(n, 1);
   a = householdervector(f);
   g = orthreflexion(a, f);
   display([norm(f), norm(g)]);
   display(norm(g(2 : end)));
   display(a' * (f + g));
end
```