Producto entre matrices triangulares

Dante Arroyo Sánchez, Elisa Suárez Barraza,
con sugerencias de Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

Marzo 2021

Objetivo

- Demostrar que el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.
- Deducir una fórmula para los elementos del producto por arriba de la diagonal principal.
- Deducir una fórmula para los elementos diagonales del producto.
- Programar varios algoritmos para multiplicar matrices triangulares.
- Hacer comprobaciones y medir el tiempo.

Plan

Ejemplos de matrices triangulares superiores

En este tema consideramos solamente matrices cuadradas.

En los ejemplos y programas, las matrices son reales.

$$\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & \log_2(7) \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo de producto de matrices triangulares superiores:

elementos del producto por debajo de la diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo de producto de matrices triangulares superiores:

elementos del producto por debajo de la diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} \end{bmatrix}.$$

$$(AB)_{4,2} = \sum_{k=1}^{5} A_{4,k} B_{k,2}$$

Ejemplo de producto de matrices triangulares superiores:

elementos del producto por debajo de la diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} \end{bmatrix}.$$

$$(AB)_{4,2} = \sum_{k=1}^{5} A_{4,k} B_{k,2} = \sum_{k=1}^{3} \underbrace{A_{4,k}}_{0} B_{k,2} + \sum_{k=4}^{5} A_{4,k} \underbrace{B_{k,2}}_{0}$$

Ejemplo de producto de matrices triangulares superiores:

elementos del producto por debajo de la diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} \end{bmatrix}.$$

$$(AB)_{4,2} = \sum_{k=1}^{5} A_{4,k} B_{k,2} = \sum_{k=1}^{3} \underbrace{A_{4,k}}_{0} B_{k,2} + \sum_{k=4}^{5} A_{4,k} \underbrace{B_{k,2}}_{0} = 0.$$

Ejemplo de producto de matrices triangulares superiores:

elementos del producto por arriba de la diagonal principal

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo de producto de matrices triangulares superiores:

elementos del producto por arriba de la diagonal principal

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} \end{bmatrix}.$$

$$C_{2,4} = \sum_{k=1}^{5} A_{2,5} B_{k,4}$$

Ejemplo de producto de matrices triangulares superiores:

elementos del producto por arriba de la diagonal principal

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} \end{bmatrix}.$$

$$C_{2,4} = \sum_{k=1}^{5} A_{2,5} B_{k,4} = \sum_{k=1}^{1} \underbrace{A_{2,k}}_{0} B_{k,4} + \sum_{k=2}^{4} A_{2,k} B_{k,4} + \sum_{k=5}^{5} A_{2,k} \underbrace{B_{k,4}}_{0}$$

Ejemplo de producto de matrices triangulares superiores:

elementos del producto por arriba de la diagonal principal

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} \end{bmatrix}.$$

$$C_{2,4} = \sum_{k=1}^{5} A_{2,5} B_{k,4} = \sum_{k=1}^{1} \underbrace{A_{2,k}}_{0} B_{k,4} + \sum_{k=2}^{4} A_{2,k} B_{k,4} + \sum_{k=5}^{5} A_{2,k} \underbrace{B_{k,4}}_{0} = \sum_{k=2}^{4} A_{2,k} B_{k,4}.$$

Plan

Definición formal de matrices triangulares superiores

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es triangular superior, si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \qquad j > k \qquad \Longrightarrow \qquad A_{j,k} = 0.$$

Definición formal de matrices triangulares superiores

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es triangular superior, si

$$\forall j,k \in \{1,\ldots,n\} \qquad j > k \qquad \Longrightarrow \qquad A_{j,k} = 0.$$

Denotamos por $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices cuadradas reales triangulares superiores de orden n:

$$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) \;:=\; \Big\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \colon \qquad \forall j,k \in \{1,\ldots,n\} \quad j > k \quad \Longrightarrow \quad A_{j,k} = 0 \Big\}.$$

El producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior

Teorema

Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Entonces $AB \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$.

El producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior

Demostración. Sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j$. Vamos a demostrar que $(AB)_{i,j} = 0$.

El producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior

Demostración. Sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j$. Vamos a demostrar que $(AB)_{i,j} = 0$.

Por la definición del producto de matrices,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

El producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior

Demostración. Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i > j$. Vamos a demostrar que $(AB)_{i,j} = 0$.

Por la definición del producto de matrices,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Separamos la suma en dos partes y usamos la suposición que $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} \underbrace{A_{i,k}}_{\substack{\| \\ 0 \\ i>j\geq k}} B_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,j}}_{\substack{\| \\ 0 \\ k\geq j+1>j}} = 0.$$

El producto de dos matrices triangulares superiores:

fórmula para los elementos no triviales

Teorema

Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ y sean $i, j \in 1, \ldots, n$, $i \leq j$. Entonces

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} A_{i,k} B_{k,j}.$$

El producto de dos matrices triangulares superiores:

fórmula para los elementos no triviales

Demostración.

Empezamos con la definición del producto de matrices:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

El producto de dos matrices triangulares superiores:

fórmula para los elementos no triviales

Demostración.

Empezamos con la definición del producto de matrices:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Separamos la suma en tres partes y usamos la suposición que $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{\substack{\| \\ 0 \\ i>i-1\geq k}} B_{k,j} + \sum_{k=i}^{j} A_{i,k} B_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,j}}_{\substack{\| \\ 0 \\ k\geq j+1>j}} = \sum_{k=i}^{j} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Fórmula para los elementos diagonales

Corolario

Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ y sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i} B_{i,i}.$$

Es un corolario del teorema anterior.

Para entrenarnos más, hagamos una demostración independiente.

Fórmula para los elementos diagonales

Demostración.

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$$

Fórmula para los elementos diagonales

Demostración.

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{\substack{\| \\ 0 \\ i>i-1\geq k}} B_{k,j} + A_{i,i}B_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,i}}_{\substack{\| \\ 0 \\ k\geq i+1>i}}$$

Fórmula para los elementos diagonales

Demostración.

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{\substack{\| \\ 0 \\ i>i-1\geq k}} B_{k,j} + A_{i,i}B_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,i}}_{\substack{\| \\ 0 \\ k\geq i+1>i}}$$

$$= A_{i,i}B_{i,i}.$$

Resumen: fórmula para los elementos del producto

Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ y sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Queremos calcular $(AB)_{i,j}$.

Combinando los dos teoremas, tenemos dos casos:

$$(AB)_{i,j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=i}^{j} A_{i,k} B_{k,j}, & i \leq j; \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Plan

Algoritmo 1 (ciclos i, j y el producto punto)

```
function AB = prod_ut_ij(A, B),
    n = rows(A);
    AB = zeros(n, n);
    for i = 1 : n,
        for j = i : n,
            AB(i, j) = A(i, i : j) * B(i : j, j);
        endfor
    endfor
endfunction
```

Algoritmo 1, producto punto.

```
function prod_ut_ij(A, B)
    n = size(A, 1)
    C = zeros(n, n)
    for i in 1 : n
        for j in i : n
            C[i, j] = dot(A[i, i : j], B(i : j, j))
        end
    end
    return C
end
```

Algoritmo 2 (ciclos i, j, k)

```
function AB = prod_ut_ijk(A, B),
    n = rows(A);
    AB = zeros(n, n)
    for i = 1 : n,
        for j = i : n,
            for k = i : j,
                AB(i, j) = AB(i, j) + A(i, k) * B(k, j);
            endfor
        endfor
    endfor
endfunction
```

Algoritmo 2 (ciclos i, j, k)

```
function prod_ut_ijk(A, B)
    n = size(A, 1); C = zeros(n, n)
    for i in 1 : n
        for j in i : n
            for k in i : j
                C[i, j] = C[i, j] + A[i, k] * B[k, j]
            end
        end
    end
    return C
end
```

Algoritmo 3 (ciclos k, j, usando axpy)

```
function prod_ut_kj(A, B)
    n = size(A, 1)
    C = zeros(n, n)
    for k in 1 : n
        for j in k : n
            C[1 : j, k] += B[j, k] * A[1 : j, j]
        end
    end
    return C
end
```

Algoritmo 4 (ciclos j, i, k)

```
function AB = prod_ut_jik(A, B),
    n = rows(A);
    AB = zeros(n, n);
    for j = 1 : n,
        for i = 1 : j,
            for k = i : j,
                AB(i, j) = AB(i, j) + A(i, k) * B(k, j);
            endfor
        endfor
    endfor
endfunction
```

El producto de matrices triang. como una suma de productos diádicos

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} & A_{1,1}B_{1,2} & A_{1,1}B_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & A_{1,2}B_{2,2} & A_{1,2}B_{2,3} \\ 0 & A_{2,2}B_{2,2} & A_{2,2}B_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{1,3}B_{3,3} \\ 0 & 0 & A_{2,3}B_{3,3} \\ 0 & 0 & A_{3,3}B_{3,3} \end{bmatrix}.$$

El producto de matrices triang. como una suma de productos diádicos

algoritmo para $n = 3$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,2} \\ A_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_{2,2} & B_{2,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \\ A_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{3,3} \end{bmatrix}.$$

```
C = zeros(3, 3);
C(1 : 1, 1 : 3) += A(1 : 1, 1) * B(1, 1 : 3);
C(1 : 2, 2 : 3) += A(1 : 2, 2) * B(2, 2 : 3);
C(1 : 3, 3 : 3) += A(1 : 3, 3) * B(3, 3 : 3);
```

Algoritmo 5 (ciclo k, con productos diádicos)

```
function prod_ut_k(A, B)
    n = size(A, 1)
    C = zeros(n, n)
        for k in 1 : n
        C[1 : k, k : end] += A[1 : k, k] * B[k, k : end]'
    end
    return C
end
```

Plan

Tiempos en Julia

	$n = 256$	$n = 512$	$n = 1024$
Álgoritmo 1	$0.63s$	$1.65s$	$10.62s$
Álgoritmo 2	$0.98s$	$2.18s$	$12.10s$
Álgoritmo 3	$0.10s$	$0.22s$	$1.25s$
Álgoritmo 4	$0.11s$	$0.35s$	$3.62s$
Algoritmo 5	$1.12s$	$1.45s$	$4.59s$

Tiempos en Octave

	$n = 256$	$n = 512$	$n = 1024$
Álgoritmo 1	$0.6s$	$3.44s$	$28s$
Álgoritmo 2	$28.2s$	$226.32s$	$1787s$
Álgoritmo 3	$1.13s$	$7s$	$19s$
Álgoritmo 4	$28s$	$228.35s$	$1798s$
Algoritmo 5	$0.02s$	$0.12s$	$3s$