Producto de matrices triangulares por vectores

Objetivos. Mostrar cómo el producto de una matriz por un vector se simplifica en el caso de matrices triangulares, convertir la fórmula en un algoritmo y calcular el número de operaciones aritméticas.

Requisitos. Matrices triangulares, notación breve para las sumas, programación con ciclos y matrices.

1. Una matriz A de tamaño $n \times n$ se llama *triangular inferior*, si para cada par de índices $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, si $j < k$, entonces $A_{j,k} = 0$. Denotamos el conjunto de todas las matrices reales triangulares inferiores por $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}): \quad \forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \quad (j < k) \;\Rightarrow\; (A_{j,k} = 0)\right\}.$$

2. Recordamos la fórmula para las entradas del producto Ab, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^n$:

$$(Ab)_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} b_k.$$

3. Producto de una matriz triangular inferior por un vector, $n = 4$. Escribamos de manera explícita el producto Ab, donde $A \in \mathfrak{lt}_4(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & 0 \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}b_1 \\ A_{2,1}b_1 + A_{2,2}b_2 \\ A_{3,1}b_1 + A_{3,2}b_2 + A_{3,3}b_3 \\ A_{4,1}b_1 + A_{4,2}b_2 + A_{4,3}b_3 + A_{4,4}b_4 \end{bmatrix}.$$

Se ve que

$$(Ab)_1 = A_{1,1}b_1 = \sum_{k=1}^{1} A_{1,k} b_k,$$

$$(Ab)_2 = A_{2,1}b_1 + A_{2,2}b_2 = \sum_{k=1}^{2} A_{2,k} b_k,$$

$$(Ab)_3 = A_{3,1}b_1 + A_{3,2}b_2 + A_{3,3}b_3 = \sum_{k=1}^{3} A_{3,k} b_k,$$

$$(Ab)_4 = A_{4,1}b_1 + A_{4,2}b_2 + A_{4,3}b_3 + A_{4,4}b_4 = \sum_{k=1}^{4} A_{4,k} b_k.$$

4. Producto de una matriz triangular inferior por un vector. Calculamos la j-ésima componente del producto Ab, donde $A \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^n$:

$$(Ab)_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} b_k = \sum_{k=1}^{j} A_{j,k} b_k + \sum_{k=j+1}^{n} A_{j,k} b_k.$$

Notamos que en la última suma $k \geq j+1 > j$ y por lo tanto $A_{j,k} = 0$. Se queda la suma con k de 1 a j:

$$(Ab)_j = \sum_{k=1}^{j} A_{j,k} b_k.$$

5. Algoritmo de multiplicación de una matriz triangular inferior por un vector.

Entrada: una matriz A, un vector b.

Se supone que A y b cumplen con los siguientes requisitos:

la matriz A es cuadrada y triangular inferior,

la longitud de b coincide con el orden de A.

$n \leftarrow$ longitud(b);

$c \leftarrow$ vector nulo de longitud n;

Para $j \leftarrow 1, \ldots, n$:

Para $k \leftarrow 1, \ldots, j$:

$c_j \leftarrow c_j + A_{j,k} b_k$.

Salida: c.

6. Número de las operaciones de multiplicación en el algoritmo. Dentro del ciclo interior (sobre k) tenemos una multiplicación, por eso en total el número de las operaciones de multiplicación es

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7. Ejercicio. Calcule la suma

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} 1.$$

Respuesta: $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

8. Ejercicio. Haga razonamientos similares para el producto de una matriz triangular superior por un vector.