Matrices triangulares

Problemas para examen

Matrices diagonales

1. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Se denota por $\operatorname{diag}(a)$ la matriz diagonal con entradas $a_1, \ldots, a_n$:

$$\operatorname{diag}(a) = \big[a_j \delta_{j,k}\big]_{j,k=1}^{n}.$$

2. Producto por componentes de dos vectores. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Denotemos por $a \odot b$ al vector cuyas componentes son los productos de las componentes correspondientes de a y b:

$$a \odot b = \big[a_j b_j\big]_{j=1}^{n}.$$

3. El producto de una matriz diagonal por un vector. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\operatorname{diag}(a) b = a \odot b.$$

4. Operaciones con matrices diagonales. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Haga las siguientes operaciones con matrices diagonales (enuncie y demuestre las fórmulas):

$$\operatorname{diag}(a) + \operatorname{diag}(b), \qquad \lambda \operatorname{diag}(a), \qquad \operatorname{diag}(a) \operatorname{diag}(b).$$

Matrices triangulares

5. Denotemos por $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de las matrices triangulares superiores y por $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de las matrices triangulares inferiores:

$$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) := \Big\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \colon \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad i > j \qquad \Rightarrow \qquad A_{i,j} = 0 \Big\};$$

$$\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R}) := \Big\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \colon \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad i < j \qquad \Rightarrow \qquad A_{i,j} = 0 \Big\}.$$

Encuentre la intersección $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$.

6. Demuestre que $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ son subespacios de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Multiplicación de matrices triangulares por vectores

7. Idea de multiplicación de una matriz triangular inferior por un vector, versión por renglones. Sean $A \in \mathfrak{lt}_5(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^5$. Aplique la definición del producto de una matriz por un vector y para cada $j \in \{1, \ldots, 5\}$ escriba $(Ab)_j$ como una suma de 5 sumandos. Luego omita los sumandos que son cero debido a la condición que A es triangular inferior. Escriba $(Ab)_j$ como el producto punto de un fragmento de un renglón de A por un fragmento de la columna b. Por ejemplo,

$$(Ab)_2 = \sum_{k=1}^{5} A_{2,k} b_k = A_{2,1}b_1 + A_{2,2}b_2 + \underbrace{A_{2,3}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (2<3)}} b_3 + \underbrace{A_{2,4}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (2<4)}} b_4 + \underbrace{A_{2,5}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (2<5)}} b_5$$

$$= A_{2,1}b_1 + A_{2,2} = \sum_{k=1}^{2} A_{2,k} b_k = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = A_{2,\{1,2\}} b_{\{1,2\}}.$$

Sombreamos los fragmentos de A y b que aparecieron en la fórmula anterior:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & 0 & 0 \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & 0 \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}.$$

Después de resolver este problema con $n = 5$ y $j = 1, 2, 3, 4, 5$, escriba la fórmula para $(Ab)_j$ con n general y $j \in \{1, \ldots, n\}$ general.

8. Idea de multiplicación de una matriz triangular inferior por un vector, versión por columnas. Sean $A \in \mathfrak{lt}_5(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^5$. Entonces el producto $c = Ab$ se puede escribir como la siguiente combinación lineal de las columnas de A:

$$c = b_1 \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \\ A_{4,1} \\ A_{5,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ A_{2,2} \\ A_{3,2} \\ A_{4,2} \\ A_{5,2} \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{3,3} \\ A_{4,3} \\ A_{5,3} \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{4,4} \\ A_{5,4} \end{bmatrix} + b_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{5,5} \end{bmatrix}.$$

Esta combinación lineal se puede calcular por pasos, empezando con $c = \mathbf{0}_5$. En cada paso hay que omitir los fragmentos que son nulos debido a la estructura triangular de A. Por ejemplo, en el segundo paso se debe ejecutar el comando

$$c_{\{2,3,4,5\}} \ += \ b_2 A_{\{2,3,4,5\},2}.$$

Escriba los comandos de los pasos $1, 2, 3, 4, 5$ para $n = 5$. Luego piense en n general y escriba el comando para el k-ésimo paso para n general.

9. Programación: el producto de una matriz triangular inferior por un vector, versión por renglones. Escriba una función que calcule el producto de una matriz triangular inferior A por un vector b, aprovechando la estructura de la matriz. En otras palabras, hay que omitir las operaciones con las entradas que son nulas por la definición de matriz triangular inferior. Calcule cada entrada del vector Ab como el producto punto de un fragmento de un renglón de A por un fragmento del vector b. Utilice el resultado del Problema 7. El producto punto se puede realizar como una operación interna del lenguaje de programación, o como una función programada anteriormente, o como un ciclo anidado. Calcule el número de operaciones de multiplicación.

10. Programación: el producto de una matriz triangular inferior por un vector, versión por columnas. Resuelva el problema anterior aplicando la operación axpy a ciertos fragmentos de columnas. Utilice el resultado del Problema 8. La operación axpy se puede realizar como una operación interna del lenguaje de programación, o como una función programada anteriormente, o como un ciclo anidado. Calcule el número de operaciones de multiplicación.

11. Programación: el producto de una matriz triangular superior por un vector, versión por renglones. Escriba una función que calcule el producto de una matriz triangular superior A por un vector b, aprovechando la estructura de la matriz. En otras palabras, hay que omitir las operaciones con las entradas que son nulas por la definición de matriz triangular superior. Calcule cada entrada del vector Ab como el producto punto de un fragmento de un renglón de A por un fragmento del vector b. El producto punto se puede realizar como una operación interna del lenguaje de programación, o como una función programada anteriormente, o como un ciclo anidado. Calcule el número de operaciones de multiplicación.

12. Programación: el producto de una matriz triangular superior por un vector, versión por columnas. Resuelva el problema anterior aplicando la operación axpy a ciertos fragmentos de columnas. La operación axpy se puede realizar como una operación interna del lenguaje de programación, o como una función programada anteriormente, o como un ciclo anidado. Calcule el número de operaciones de multiplicación.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales con matrices triangulares

13. Programación: solución de un sistema de ecuaciones lineales con una matriz triangular inferior, versión por renglones. Escriba una función que resuelva un sistema de ecuaciones lineales con una matriz triangular inferior. Las entradas son una matriz L y un vector b. Denotemos la longitud de b por n. Se supone que $L \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ y $L_{j,j} \neq 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Utilice el método de sustitución hacia adelante y calcule las $x_1, \ldots, x_n$ de manera sucesiva, es decir, en el cálculo de x_j utilice las componentes $x_1, \ldots, x_{j-1}$ calculadas previamente. Utilice la operación producto punto. El producto punto se puede realizar como una operación interna del lenguaje de programación, o como una función programada anteriormente, o como un ciclo anidado. Calcule el número de operaciones de multiplicación y división.

14. Programación: solución de un sistema de ecuaciones lineales con una matriz triangular inferior, versión por columnas. Escriba una función que resuelva el problema anterior usando operaciones axpy por columnas, aprovechando la estructura de la matriz. La operación axpy se puede realizar como una operación interna del lenguaje de programación, o como una función programada anteriormente, o como un ciclo anidado. Calcule el número de operaciones de multiplicación y división.

15. Programación: solución de un sistema de ecuaciones lineales con una matriz triangular superior, versión por renglones. Escriba una función que resuelva un sistema de ecuaciones lineales con una matriz triangular superior. Las entradas son una matriz U y un vector b. Denotemos la longitud de b por n. Se supone que $U \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ y $U_{j,j} \neq 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Utilice el método de sustitución hacia adelante y calcule las $x_1, \ldots, x_n$ de manera sucesiva, es decir, en el cálculo de x_j utilice las componentes $x_1, \ldots, x_{j-1}$ calculadas previamente. Utilice la operación producto punto. El producto punto se puede realizar como una operación interna del lenguaje de programación, o como una función programada anteriormente, o como un ciclo anidado. Calcule el número de operaciones de multiplicación y división.

16. Programación: solución de un sistema de ecuaciones lineales con una matriz triangular superior, versión por columnas. Escriba una función que resuelva el problema anterior usando operaciones axpy por columnas, aprovechando la estructura de la matriz. La operación axpy se puede realizar como una operación interna del lenguaje de programación, o como una función programada anteriormente, o como un ciclo anidado. Calcule el número de operaciones de multiplicación y división.

Multiplicación de matrices triangulares

17. Producto de matrices triangulares superiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que $AB \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Enuncie y demuestre la fórmula para las entradas del producto AB.

18. Programación: producto de matrices triangulares superiores. Escriba una función que calcule el producto de matrices triangulares superiores aprovechando su estructura. En otras palabras, hay que omitir las operaciones con las entradas que son nulas por la definición de matriz triangular superior. Calcule el número de flops.

19. Producto de matrices triangulares inferiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que $AB \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$. Enuncie y demuestre la fórmula para las entradas del producto AB.

20. Programación: producto de matrices triangulares inferiores. Escriba una función que calcule el producto de matrices triangulares inferiores aprovechando su estructura. En otras palabras, hay que omitir las operaciones con las entradas que son nulas por la definición de matriz triangular superior. Calcule el número de flops.

Invertibilidad de matrices triangulares

21. Criterio de invertibilidad de matrices triangulares inferiores. Sea $L \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$L \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad L_{j,j} \neq 0.$$

22. Si una matriz triangular inferior es invertible, entonces su inversa también es triangular inferior. Sea $L \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$. Supongamos que L es invertible. Demuestre que $L^{-1} \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$.

23. Criterio de invertibilidad de matrices triangulares superiores. Sea $U \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$U \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad U_{j,j} \neq 0.$$

24. Si una matriz triangular supeior es invertible, entonces su inversa también es triangular superior. Sea $U \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Supongamos que U es invertible. Demuestre que $U^{-1} \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$.