Matrices ortogonales

Problemas para examen

Definición de matrices ortogonales

1. Invertibilidad de matrices cuadradas por la izquierda y por la derecha. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es invertible por la izquierda, es decir, existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $BA = I_n$.

(b) A es invertible por la derecha, es decir, existe una matriz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AC = I_n$.

(c) A es invertible, es decir, existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AD = I_n$ y $DA = I_n$.

2. Definición (matriz ortogonal). Una matriz $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llama *ortogonal* si

$$Q^\top Q = I_n \qquad \wedge \qquad QQ^\top = I_n.$$

El conjunto de las matrices ortogonales de orden n se denota por $O(n, \mathbb{R})$:

$$O(n, \mathbb{R}) \coloneqq \big\{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \colon \quad Q^\top Q = I_n \quad \wedge QQ^\top = I_n\big\}.$$

3. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $Q^\top Q = I_n$ y $QQ^\top = I_n$.

(b) $Q^\top Q = I_n$.

(c) $QQ^\top = I_n$.

4. Otra forma de la definición de matriz ortogonal. Una matriz Q es ortogonal si y sólo si es invertible y $Q^{-1} = Q^\top$.

5. Grupo de matrices ortogonales. Demuestre que $O(n, \mathbb{R})$ es un grupo:

- Si $A, B \in O(n, \mathbb{R})$, entonces $AB \in O(n, \mathbb{R})$.
- $I_n \in O(n, \mathbb{R})$.
- Si $A \in O(n, \mathbb{R})$, entonces $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$.

6. Determinante de matrices ortogonales. Sea $Q \in O(n, \mathbb{R})$. Demuestre que

$$\det(Q) = 1 \qquad \vee \qquad \det(Q) = -1.$$

Criterio de matriz ortogonal en términos de sus renglones y columnas

7. Entradas del producto $Q^\top Q$. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule $(Q^\top Q)_{i,j}$. Primero escriba $(Q^\top Q)_{i,j}$ como cierta suma, luego como el producto-punto de ciertas columnas de Q.

8. Entradas del producto $QQ^\top$. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule $(QQ^\top)_{i,j}$. Primero escriba $(QQ^\top)_{i,j}$ como cierta suma, luego como el producto-punto de ciertos renglones de Q.

9. Nota (bases ortonormales). Si $a_1, \ldots, a_n$ son algunos vectores ortonormales del espacio $\mathbb{R}^n$, entonces $a_1, \ldots, a_n$ forman una base de $\mathbb{R}^n$.

10. Teorema: Criterio de matriz ortogonal en términos de renglones y columnas. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- Q es una matriz ortogonal.
- los renglones de Q forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \langle Q_{i,*}, Q_{j,*} \rangle = \delta_{i,j}.$$

- las columnas de Q forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \langle Q_{*,i}, Q_{*,j} \rangle = \delta_{i,j}.$$

Criterio de matriz ortogonal en términos del producto interno, norma y distancia

11. Escriba la definición del producto interno canónico (producto-punto) en $\mathbb{R}^n$.

12. Escriba la definición de la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Exprese la norma euclidiana a través del producto-punto.

13. Escriba la definición de la distancia canónica (euclidiana) en $\mathbb{R}^n$. Exprese la distancia euclidiana a través de la norma euclidiana.

14. Identidades de polarización. Recuerde cómo expresar un producto interno a través de la norma inducida por este mismo producto interno.

15. Recuerde cómo expresar una norma por la distancia inducida por esta misma norma.

16. Teorema: criterio de matriz ortogonal en términos del producto interno, norma y distancia. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $Q \in O(n, \mathbb{R})$.

(b) Q preserva el producto interno de vectores:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(c) Q preserva la norma euclidiana de vectores:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|Qx\|_2 = \|x\|_2.$$

(d) A preserva la distancia euclidiana entre vectores:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad d_2(Ax, Ay) = d(x, y).$$

17. Recuerde la definición de la norma de Frobenius de una matriz.

18. Multiplicación por una matriz ortogonal preserva la norma de Frobenius. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sea $Q \in O(n, \mathbb{R})$. Entonces

$$\|QA\|_F = \|A\|_F \qquad \text{y} \qquad \|AQ\|_F = \|A\|_F.$$

Rotaciones del plano

19. Escriba la definición de la matriz de rotación R_α.

20. Enuncie y demuestre la fórmula para el producto $R_\alpha R_\beta$.

21. Calcule $R_\alpha^\top$.

22. Calcule $R_\alpha R_{-\alpha}$.

23. Demuestre que $R_\alpha \in O(n, \mathbb{R})$.

24. Sean $c, s \in \mathbb{R}$ tales que $c^2 + s^2 = 1$. Explique cómo calcular un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$c = \cos(\alpha), \qquad s = \operatorname{sen}(\alpha).$$

Considere varios casos y use la función arctan.

25. Sea $A \in O(n, \mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 1$.

I. Demuestre que existen $c, s \in \mathbb{R}$ tales que $c^2 + s^2 = 1$ y

$$A = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

II. Demuestre que existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

26. Rotación de Givens en el caso de dos dimensiones. Sea

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Encuentre algunos números $c, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$c^2 + s^2 = 1$$

y

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Proyección ortogonal a una recta

27. Proyección ortogonal unidimensional. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que existe un único número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x - \alpha v \perp v$. En esta situación el vector αv se denota por $\mathrm{pr}_v(x)$.

28. Matriz de la proyección ortogonal unidimensional. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Muestre que la función $x \mapsto \mathrm{pr}_v(x)$ es un operador lineal y calcule su matriz P_v.

29. Rango de la proyección ortogonal unidimensional. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Demuestre que el rango de la matriz P_v es 1.

30. Matriz de la proyección ortogonal es la misma para dos vectores que generan a la misma recta. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demuestre que

$$P_{\lambda v} = P_v.$$

31. Propiedades de la proyección ortogonal a una recta. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Demuestre las siguientes propiedades de la matriz P_v:

1. $P_v^2 = P_v$.
2. $P_v^\top = P_v$.

Reflexiones ortogonales (reflexiones de Householder)

32. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Deduzca una fórmula para la reflexión ortogonal del vector x con respecto al hiperplano perpendicular al vector v. Denotemos por H_v a la matriz del operador lineal correspondiente. Exprese H_v en términos de P_v.

33. Propiedades de la matriz de reflexión de Householder. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Demuestre las siguientes propiedades de la matriz H_v:

1. $H_v^2 = I_n$.
2. $H_v^\top = H_v$.
3. $H_v \in O(n, \mathbb{R})$.

34. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demuestre que

$$H_{\lambda v} = H_v.$$

35. Sobre las diagonales de un rombo. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|a\|_2 = \|b\|_2$. Demuestre que $a + b \perp a - b$.

36. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|a\|_2 = \|b\|_2 \neq 0$. Construya un vector $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que

$$H_v a = b.$$

37. Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que $x \neq \|x\|_2 e_1$. Construya un vector $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que $v_1 = 1$ y

$$H_v x = \left[\|x\|_2, 0, \ldots, 0\right]^\top.$$