Operaciones con matrices

Problemas para examen

Operaciones lineales con vectores

1. Programación: la suma de dos vectores. Escriba una función que calcule $x + y$, donde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Salida: vector $x + y$.

2. Programación: el producto de un escalar por un vector. Escriba una función que calcule αx, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Salida: vector αx.

3. Programación: axpy ("a x plus y"). Escriba una función que realice la operación $\alpha x + y$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Salida: vector $\alpha x + y$.

Producto de vectores por componentes

4. Programación: producto de vectores por componentes. Escriba una función que calcule el vector

$$x \odot y := \big[x_j y_j\big]_{j=1}^n,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Salida: el vector $x \odot y = \big[x_j y_j\big]_{j=1}^n$.

Comentario: esta operación se aplica para multiplicar matrices diagonales y para realizar la convolución discreta cíclica de dos vectores por medio de la Transformada Discreta de Fourier.

Producto interno de vectores

5. Programación: producto interno de vectores. Escriba una función que calcule

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

> Entrada: $x, y \in \mathbb{R}^n$.
>
> Salida: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Producto diádico de vectores

6. Producto diádico de dos vectores. Sean $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$. El *producto diádico* de a y b se define como la matriz

$$ab^\top = \big[a_j b_k\big]_{j,k=1}^{m,n}.$$

Esta matriz también se llama el *producto tensorial* de a y b y se denota por $a \otimes b$.

7. Programación: producto diádico de vectores. Escriba una función que calcule el producto diádico de dos vectores dados.

> Entrada: $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.
>
> Salida: matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A_{i,j} = x_i y_j$ para todos $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Multiplicación de matrices por vectores

8. Definición. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Escriba la definición del producto Ab:

$$Ab \in \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad (Ab)_i = \sum_{j=?}^{?} \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

9. Cada componente del producto de una matriz por un vector se expresa como un producto interno. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Muestre que cada componente del producto Ab se puede escribir como un producto interno de ciertos vectores.

10. Programación: multiplicación de una matriz por un vector, versión con producto interno. Escriba una función que calcule el producto de una matriz por un vector usando la fórmula obtenida en el problema anterior.

11. El producto de una matriz por un vector es una combinación lineal de las columnas de la matriz. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Escriba el producto Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A.

12. Programación: producto de una matriz por un vector, versión por columnas. Basándose en la fórmula del ejercicio anterior escriba una función de dos argumentos A y b, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, que calcule el producto Ab trabajando con las columnas de la matriz A y usando operaciones saxpy de nivel 1.

13. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$A(x+y) = Ax + Ay.$$

14. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Varias formas de escribir el producto de matrices

15. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Demuestre la siguiente fórmula para el i-ésimo renglón del producto AB:

$$(AB)_{i,*} = A_{i,*}B.$$

16. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Demuestre la siguiente fórmula para la j-ésima columna del producto AB:

$$(AB)_{*,j} = AB_{*,j}.$$

17. Escriba funciones calculen el producto de matrices usando las fórmulas de los problemas anteriores.

18. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Muestre que cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de B.

19. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Muestre que cada renglón del producto AB es una combinación lineal de los renglones de A.

20. Escriba funciones calculen el producto de matrices usando las fórmulas de los problemas anteriores.

21. Producto de matrices como una suma de productos diádicos. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Muestre con ejemplos y luego con un razonamiento formal que

$$AB = \sum_{k=1}^{n} A_{*,k}B_{k,*}.$$

Escriba una función que calcule el producto matrices por esta fórmula.

Matriz transpuesta

22. Definición de la matriz transpuesta.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Escrba la definición de $A^\top$.

23. Matriz transpuesta del producto de matrices.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Traza

24. Definición de la traza de una matriz cuadrada.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(n)$. Escriba la definición de $\operatorname{tr}(A)$.

25. La traza del producto no depende del orden de los factores.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Matrices simétricas

26. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que existe un único par de matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.

27. Producto de matrices simétricas. Determine si el producto AB siempre es una matriz simétrica para cualesquiera matrices simétricas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o no.

Símbolo delta de Kronecker

28. Propiedad principal del símbolo delta de Kronecker.
Simplifique la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,j} a_k.$$

Considere dos casos: 1) $j \in \{1, \ldots, n\}$ y 2) $j \notin \{1, \ldots, n\}$.

29. Base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea n un número fijo y sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por e_p al vector del espacio $\mathbb{R}^n$ cuya p-ésima componente es 1 y todas las demás son 0. Exprese la j-ésima componente del vector e_p en términos del símbolo de Kronecker:

$$(e_p)_j = ?$$

30. Producto de una matriz por un vector de la base canónica. Enuncie y demuestre la fórmula para el producto Ae_p, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y e_p es el p-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

31. Producto de un vector de la base canónica por una matriz. Enuncie y demuestre la fórmula para el producto $e_p^\top A$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y e_p es el p-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

32. Producto de una matriz por vectores de la base canónica por ambos lados. Enuncie y demuestre la fórmula para el producto $e_p^\top A e_q$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $p \in \{1,\ldots,m\}$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, e_p es el p-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^m$, e_q es el q-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Notación (matrices básicas). Sean $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$ algunos números fijos. Para cualesquiera $p \in \{1,\ldots,m\}$, $q \in \{1,\ldots,n\}$ definamos la matriz $E_{p,q}$ mediante la siguiente regla:

$$E_{p,q} = \left[\delta_{i,p}\delta_{j,q}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Para $m = 3$, $n = 3$ escriba las matrices $E_{1,3}$, $E_{2,2}$ y $E_{3,2}$.

33. Tabla de multiplicación de matrices básicas. Calcule la tabla de multiplicación de matrices básicas para $m = n = 2$:

	$E_{1,1}$	$E_{1,2}$	$E_{2,1}$	$E_{2,2}$
$E_{1,1}$				
$E_{1,2}$				
$E_{2,1}$				
$E_{2,2}$				

Enuncie y demuestre la fórmula general para el producto $E_{p,q}E_{r,s}$.

34. Matrices básicas como productos diádicos de vectores básicos. Sean $p \in \{1,\ldots,m\}$, $q \in \{1,\ldots,n\}$. Exprese la matriz $E_{p,q}$ como el producto diádico $ab^\top$ de algunos vectores básicos.

35. Matriz identidad y su propiedad principal. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$I_m A = A, \qquad A I_n = A.$$

Definición (matriz de permutación). Sea $\varphi \in S_n$. Entonces la matriz $P_\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define de la siguiente manera:

$$P_\varphi = \left[\delta_{\varphi(i),j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

36. Producto de matrices de permutación. Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Demuestre que

$$P_\varphi P_\psi = P_{\psi\varphi}.$$

37. La inversa de una matriz de permutación. Sea $\varphi \in S_n$. Demuestre que la matriz P_φ es invertible y su inversa es su transpuesta.

Propiedades de la multiplicación de matrices

38. Demuestre la propiedad distributiva izquierda: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, entonces

$$A(B+C) = AB + AC.$$

39. Demuestre la propiedad distributiva derecha: si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, entonces

$$(A+B)C = AC + BC.$$

40. Demuestre la propiedad asociativa: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, entonces

$$(AB)C = A(BC).$$

41. Demuestre la propiedad homogénea izquierda: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

42. Demuestre la propiedad homogénea derecha: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

“Propiedades raras” de la multiplicación de matrices

43. Construya un ejemplo de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$AB \neq BA.$$

44. Construya un ejemplo de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$A \neq \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad B \neq \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad AB = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

45. Construya un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A \neq \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad A^2 = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

46. Construya un ejemplo de matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$A \neq B, \qquad C \neq \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad AC = BC.$$