Vectores y matrices

Problemas para examen

Operaciones lineales con vectores

1. Programación: la suma de dos vectores. Escriba una función que calcule $x + y$, donde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Salida: vector $x + y$.

2. Programación: el producto de un escalar por un vector. Escriba una función que calcule αx, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Salida: vector αx.

3. Programación: axpy ("a x plus y"). Escriba una función que realice la operación $\alpha x + y$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Salida: vector $\alpha x + y$.

Producto de vectores por componentes

4. Programación: producto de vectores por componentes. Escriba una función que calcule el vector

$$x \odot y \coloneqq \left[x_j y_j\right]_{j=1}^n,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Salida: el vector $x \odot y = \left[x_j y_j\right]_{j=1}^n$.

Comentario: esta operación se aplica para multiplicar matrices diagonales y para realizar la convolución discreta cíclica de dos vectores por medio de la Transformada Discreta de Fourier.

Producto interno de vectores

5. Programación: producto interno de vectores. Escriba una función que calcule

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de flops.

Entrada: $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Salida: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Producto diádico de vectores

6. Producto diádico de dos vectores. Sean $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$. El *producto diádico* de a y b se define como la matriz

$$ab^\top = \big[a_j b_k\big]_{j,k=1}^{m,n}.$$

Esta matriz también se llama el *producto tensorial* de a y b y se denota por $a \otimes b$.

7. Programación: producto diádico de vectores. Escriba una función que calcule el producto diádico de dos vectores dados.

Entrada: $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Salida: matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A_{i,j} = x_i y_j$ para todos $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Multiplicación de matrices por vectores

8. Definición. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Escriba la definición del producto Ab:

$$Ab \in \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad (Ab)_i = \sum_{j=?}^{?} \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

9. Cada componente del producto de una matriz por un vector se expresa como un producto interno. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Muestre que cada componente del producto Ab se puede escribir como el producto interno de ciertos vectores.

10. Programación: multiplicación de una matriz por un vector, versión con producto interno. Escriba una función que calcule el producto de una matriz por un vector usando la fórmula obtenida en el problema anterior. Se recomienda utilizar la función del Problema 5 o un análogo de esta función en el lenguaje de programación elegido. Calcule el número de flops.

Entrada: $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Salida: el vector Ab.

11. El producto de una matriz por un vector es una combinación lineal de las columnas de la matriz. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Escriba el producto Ab como una combinación lineal de las columnas de la matriz A.

12. Programación: producto de una matriz por un vector, versión por columnas. Basándose en la fórmula del ejercicio anterior escriba una función de dos argumentos A y b, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, que calcule el producto Ab trabajando con las columnas de la matriz A y usando la operación axpy (la función del Problema 3 o su análogo en el lenguaje re programación elegido). Calcule el número de flops.

13. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A(x + y) = Ax + Ay$.

14. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Matrices diagonales y su multiplicación por vectores

15. Denotemos por $\operatorname{Diag}\mathbb{R}n$ al conjunto de las matrices reales diagonales $n \times n$. Escriba la definición formal del conjunto $\operatorname{Diag}\mathbb{R}n$.

16. Dado un vector $d \in \mathbb{R}^n$, denotemos por $\operatorname{diag}(d)$ a la matriz diagonal $n\times n$ con entradas diagonales $d_1, \ldots, d_n$. Escriba la definición formal de la matriz $\operatorname{diag}(d)$.

17. Producto de una matriz diagonal por un vector. Sean $d, v \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\operatorname{diag}(d)v = d \odot v.$$

Multiplicación de matrices triangulares por vectores

18. Escriba las definiciones formulas de los conjuntos $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ (el conjunto de las matrices triangulares inferiores y el conjunto de las matrices triangulares superiores).

19. Cada componente del producto de una matriz triangular inferior por un vector se expresa como un producto interno. Sea $A \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$.

I. Muestre que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ la j-ésima componente del producto $c = Ab$ se puede escribir como un producto interno, donde se multiplica un fragmento de la j-ésimo renglón de A por un fragmento del vector b:

$$c_j = A_{j,1:j} b_{1:j}.$$

II. Escriba una función de dos argumentos A y b que realice la fórmula del inciso I. Se supone que A es una matriz real triangular superior, y la longitud del vector b coincide con el orden de la matriz A.

III. Calcule el número de operaciones de multiplicación que se ejecutan en la función del inciso II. La respuesta es un polinomio en n.

20. Cada componente del producto de una matriz triangular superior por un vector se expresa como un producto interno. Resuelva un análogo del problema anterior para el caso cuando A es una matriz triangular superior.

21. Producto de una matriz triangular inferior por un vector en términos de operaciones lineales. Sea $A \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$.

I. Muestre que el producto $c = Ab$ se puede calcular sumando a ciertos fragmentos del vector c ciertos fragmentos de las columas de la matriz A multiplicados por ciertas componentes del vector b. Por ejemplo, en el caso $n = 3$, el vector c se puede calcular de la siguiente manera:

```
c = zeros(3, 1);
c(1 : 3) = c(1 : 3) + b(1) * A(1 : 3, 1);
c(2 : 3) = c(2 : 3) + b(2) * A(2 : 3, 2);
c(3 : 3) = c(3 : 3) + b(3) * A(3 : 3, 3);
```

II. Escriba una función de dos argumentos A y b que realice la idea del inciso I usando un ciclo for y la operación axpy. Se supone que A es una matriz real triangular superior, y la longitud del vector b coincide con el orden de la matriz A.

III. Calcule el número de operaciones de multiplicación que se ejecutan en la función del inciso II. La respuesta es un polinomio en n.

22. Producto de una matriz triangular superior por un vector en términos de operaciones lineales. Resuelva un análogo del problema anterior para el caso cuando A es una matriz triangular superior.

Varias formas de escribir el producto de matrices

23. Producto de matrices escrito por renglones. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Demuestre la siguiente fórmula para el j-ésimo renglón del producto AB:

$$(AB)_{j,*} = A_{j,*}B.$$

24. Producto de matrices escrito por columnas (problema optativo). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Demuestre la siguiente fórmula para la k-ésima columna del producto AB:

$$(AB)_{*,k} = AB_{*,k}.$$

25. Producto de matrices como una suma de productos diádicos (problema optativo). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Muestre con ejemplos y luego con un razonamiento formal que

$$AB = \sum_{k=1}^{n} A_{*,k}B_{k,*}.$$

Escriba una función que calcule el producto matrices por esta fórmula.

26. Escriba funciones calculen el producto de matrices usando las fórmulas de los problemas anteriores. Calcule el número de operaciones de multiplicación que se utilizan en estos algoritmos. La respuesta debe estar escrita en términos de m, n, p. Es la misma respuesta para cada uno de los tres caminos mencionados arriba. Decimos que estos tres algoritmos son *estándares*.

27. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sea $c \in \mathbb{R}^n$. Calcule el número de las operaciones de multiplicación de números reales que se utilizan para calcular $(AB)c$. Calcule el número de las operaciones de multiplicación de números reales que se utilizan para calcular $A(Bc)$. Se supone que el producto de matrices se calcula por alguno de los algoritmos estándares.

Matriz transpuesta

28. Definición de la matriz transpuesta.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Escriba la definición de $A^\top$.

29. Matriz transpuesta del producto de matrices.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Traza

30. Definición de la traza de una matriz cuadrada.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(n)$. Escriba la definición de $\operatorname{tr}(A)$.

31. La traza del producto no depende del orden de los factores.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Matrices simétricas

32. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que existe un único par de matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.

33. Producto de matrices simétricas. Determine si el producto AB siempre es una matriz simétrica para cualesquiera matrices simétricas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o no.

Símbolo delta de Kronecker

34. Propiedad principal del símbolo delta de Kronecker.
Simplifique la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,j} a_k.$$

Considere dos casos: 1) $j \in \{1, \ldots, n\}$ y 2) $j \notin \{1, \ldots, n\}$.

35. Base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea n un número fijo y sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por e_p al vector del espacio $\mathbb{R}^n$ cuya p-ésima componente es 1 y todas las demás son 0. Exprese la j-ésima componente del vector e_p en términos del símbolo de Kronecker:

$$(e_p)_j = ?$$

36. Producto de una matriz por un vector de la base canónica. Enuncie y demuestre la fórmula para el producto Ae_p, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y e_p es el p-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

37. Producto de un vector de la base canónica por una matriz. Enuncie y demuestre la fórmula para el producto $e_p^\top A$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y e_p es el p-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

38. Producto de una matriz por vectores de la base canónica por ambos lados. Enuncie y demuestre la fórmula para el producto $e_p^\top A e_q$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $p \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, e_p es el p-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^m$, e_q es el q-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Notación (matrices básicas). Sean $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$ algunos números fijos. Para cualesquiera $p \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$ definamos la matriz $E_{p,q}$ mediante la siguiente regla:

$$E_{p,q} = \left[\delta_{i,p}\delta_{j,q}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Para $m = 3$, $n = 3$ escriba las matrices $E_{1,3}$, $E_{2,2}$ y $E_{3,2}$.

39. Tabla de multiplicación de matrices básicas. Calcule la tabla de multiplicación de matrices básicas para $m = n = 2$:

	$E_{1,1}$	$E_{1,2}$	$E_{2,1}$	$E_{2,2}$
$E_{1,1}$				
$E_{1,2}$				
$E_{2,1}$				
$E_{2,2}$				

Enuncie y demuestre la fórmula general para el producto $E_{p,q}E_{r,s}$.

40. Matrices básicas como productos diádicos de vectores básicos. Sean $p \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$. Exprese la matriz $E_{p,q}$ como el producto diádico $ab^\top$ de algunos vectores básicos.

41. Matriz identidad y su propiedad principal. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$I_m A = A, \qquad AI_n = A.$$

Definición (matriz de permutación). Sea $\varphi \in S_n$. Entonces la matriz $P_\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define de la siguiente manera:

$$P_\varphi = \left[\delta_{\varphi(i),j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

42. Programación: matriz de permutación. Escribir una función que construya la matriz de permutación P_s a partir del vector $(s(1), \ldots, s(n))$, donde $s \in S_n$. Por ejemplo, si s es el vector con coordenadas $3, 1, 2$, entonces se debe construir la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

43. Producto de una matriz de permutación por un vector. Sea $\varphi \in S_n$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Deduzca una fórmula para las componentes del vector $P_\varphi v$.

44. Programación: producto de una matriz de permutación por un vector. Escribir una función que calcule el producto $P_s v$, donde $s \in S_n$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Los argumentos de la función son los vectores $s = (s(1), \ldots, s(n))$ y v.

45. Producto de matrices de permutación. Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Demuestre que

$$P_\varphi P_\psi = P_{\psi\varphi}.$$

46. La inversa de una matriz de permutación. Sea $\varphi \in S_n$. Demuestre que la matriz P_φ es invertible y su inversa es su transpuesta.

Propiedades de la multiplicación de matrices

47. Demuestre la propiedad distributiva izquierda: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, entonces

$$A(B + C) = AB + AC.$$

48. Demuestre la propiedad distributiva derecha: si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, entonces

$$(A + B)C = AC + BC.$$

49. Demuestre la propiedad asociativa: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, entonces

$$(AB)C = A(BC).$$

50. Demuestre la propiedad homogénea izquierda: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

51. Demuestre la propiedad homogénea derecha: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

"Propiedades raras" de la multiplicación de matrices

52. Construya un ejemplo de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$AB \neq BA.$$

53. Construya un ejemplo de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$A \neq \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad B \neq \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad AB = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

54. Construya un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A \neq \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad A^2 = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

55. Construya un ejemplo de matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$A \neq B, \qquad C \neq \mathbf{0}_{2\times 2}, \qquad AC = BC.$$