Matrices ortogonales y descomposición QR

Problemas para examen

Agradezco a Aldo Iván Leal García por varias correcciones importantes.

Invertibilidad por la izquierda y por la derecha (repaso)

1. Conceptos de invertibilidad por la izquierda y por la derecha. Sea V un espacio vectorial y sea $T\colon V \to V$ un operador lineal.

I. ¿Cuándo se dice que T es invertible? ¿Cuándo se dice que T es invertible por la izquierda? ¿Por la derecha?

II. Supongamos que L es un operador inverso de T por la izquierda, esto es, $LT = I$, y R es un operador inverso de T por la derecha, esto es, $TR = I$. Demuestre que $L = R$.

III. Usando el resultado del inciso III demuestre que T es invertible si y sólo si es invertible por la izquierda y por la derecha.

IV. Supongamos que T es invertible. Usando el resultado del inciso III demuestre que su inverso es único.

V. Supongamos que T es invertible. Usando el resultado del inciso III demuestre que cualquire operador inverso izquierdo de T coincide con T^{-1}, y cualquier operador inverso derecho de T coincide con T^{-1}.

2. Operadores de desplazamiento en el espacio de sucesiones. Denotemos por $\mathbb{N}_0$ al conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$. En el espacio de las sucesiones cuadrado integrables $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ consideremos dos operadores de desplazamiento:

$$R\colon (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots), \qquad L\colon (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots).$$

Calcule las composiciones LR y RL. Haga conclusiones sobre la invertibilidad de L y R por la izquierda y por la derecha.

3. Teorema (invertibilidad de matrices cuadradas por la izquierda y por la derecha). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es invertible por la izquierda.

(b) A es invertible por la derecha.

(c) A es invertible.

Hay por lo menos tres caminos naturales para demostrar este teorema. I. Operaciones elementales y matrices elementales. II. Teorema sobre el rango y la nulidad. III. El determinante y la matriz adjunta clásica (la matriz de cofactores transpuesta).

Definición de matrices ortogonales

4. Definición (matriz ortogonal). Una matriz $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llama *ortogonal* si

$$Q^\top Q = I_n \qquad \wedge \qquad QQ^\top = I_n.$$

El conjunto de las matrices ortogonales de orden n se denota por $O(n, \mathbb{R})$:

$$O(n, \mathbb{R}) \coloneqq \big\{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \colon \quad Q^\top Q = I_n \quad \wedge QQ^\top = I_n\big\}.$$

5. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $Q^\top Q = I_n$ y $QQ^\top = I_n$.

(b) $Q^\top Q = I_n$.

(c) $QQ^\top = I_n$.

6. Otra forma de la definición de matriz ortogonal. Una matriz Q es ortogonal si y sólo si es invertible y $Q^{-1} = Q^\top$.

7. Grupo de matrices ortogonales. Demuestre que $O(n, \mathbb{R})$ es un grupo:

- Si $A, B \in O(n, \mathbb{R})$, entonces $AB \in O(n, \mathbb{R})$.
- $I_n \in O(n, \mathbb{R})$.
- Si $A \in O(n, \mathbb{R})$, entonces $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$.

8. Determinante de matrices ortogonales. Sea $Q \in O(n, \mathbb{R})$. Demuestre que

$$\det(Q) = 1 \qquad \vee \qquad \det(Q) = -1.$$

Criterio de matriz ortogonal en términos de sus renglones y columnas

9. Entradas del producto $\boldsymbol{Q^\top Q}$. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sean $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule $(Q^\top Q)_{j,k}$. Primero escriba $(Q^\top Q)_{j,k}$ como cierta suma, luego como el producto-punto de ciertas columnas de Q.

10. Entradas del producto $\boldsymbol{QQ^\top}$. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sean $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule $(QQ^\top)_{j,k}$. Primero escriba $(QQ^\top)_{j,k}$ como cierta suma, luego como el producto-punto de ciertos renglones de Q.

11. Nota (bases ortonormales). Si $a_1, \ldots, a_n$ son algunos vectores ortonormales del espacio $\mathbb{R}^n$, entonces $a_1, \ldots, a_n$ forman una base de $\mathbb{R}^n$.

12. Teorema (criterio de matriz ortogonal en términos de renglones y columnas). Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- Q es una matriz ortogonal.
- los renglones de Q forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$:
$$\forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \qquad \langle Q_{j,*}, Q_{k,*} \rangle = \delta_{j,k}.$$
- las columnas de Q forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$:
$$\forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \qquad \langle Q_{*,j}, Q_{*,k} \rangle = \delta_{j,k}.$$

Criterio de matriz ortogonal en términos del producto interno, norma y distancia

13. Escriba la definición del producto interno canónico (producto-punto) en $\mathbb{R}^n$.

14. Escriba la definición de la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Exprese la norma euclidiana a través del producto-punto.

15. Escriba la definición de la distancia canónica (euclidiana) en $\mathbb{R}^n$. Exprese la distancia euclidiana a través de la norma euclidiana.

16. Identidades de polarización. Recuerde cómo expresar un producto interno a través de la norma inducida por este mismo producto interno.

17. Recuerde cómo expresar una norma por la distancia inducida por esta misma norma.

18. Teorema (criterio de matriz ortogonal en términos del producto interno, norma y distancia). Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $Q \in O(n, \mathbb{R})$.

(b) Q preserva el producto interno de vectores:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(c) Q preserva la norma euclidiana de vectores:
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|Qx\|_2 = \|x\|_2.$$

(d) A preserva la distancia euclidiana entre vectores:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad d_2(Ax, Ay) = d_2(x, y).$$

19. Recuerde la definición de la norma de Frobenius de una matriz.

20. Multiplicación por una matriz ortogonal preserva la norma de Frobenius. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sea $Q \in O(n, \mathbb{R})$. Entonces
$$\|QA\|_F = \|A\|_F \qquad \text{y} \qquad \|AQ\|_F = \|A\|_F.$$

Rotaciones del plano

21. Escriba la definición de la matriz de rotación R_α.

22. Enuncie y demuestre la fórmula para el producto $R_\alpha R_\beta$.

23. Calcule $R_\alpha^\top$.

24. Calcule $R_\alpha R_{-\alpha}$.

25. Demuestre que $R_\alpha \in O(n, \mathbb{R})$.

26. Sean $c, s \in \mathbb{R}$ tales que $c^2 + s^2 = 1$. Explique cómo calcular un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$c = \cos(\alpha), \qquad s = \operatorname{sen}(\alpha).$$

Considere varios casos y use la función arctan.

27. Sea $A \in O(n, \mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 1$.

I. Demuestre que existen $c, s \in \mathbb{R}$ tales que $c^2 + s^2 = 1$ y

$$A = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

II. Demuestre que existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

28. Rotación de Givens en el caso de dos dimensiones. Sea

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Encuentre algunos números $c, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$c^2 + s^2 = 1$$

y

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

29. Programación: hypot. Escriba una función de dos argumentos $x, y \in \mathbb{R}$ que calcule y regrese $\sqrt{x^2 + y^2}$.

30. Programación: givenscs. Escriba una función de un argumento vectorial $v \in \mathbb{R}^2$ que regrese un par de números $c, s \in \mathbb{R}$ tales que $c^2 + s^2 = 1$ y

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}.$$

31. Programación: rotate. Escriba una función de tres argumentos $c, s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, que calcule y regrese un vector y obtenido del vector x al aplicar la rotación con parámetros c y s a las coordenadas p y q.

Proyección ortogonal sobre una recta

32. Proyección ortogonal sobre el subespacio generado por un vector. Sean $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que existe un único número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v - \lambda a \perp a$. En esta situación el vector λa se denota por $\mathrm{pr}_a(v)$.

33. Matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por un vector. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Muestre que la función $v \mapsto \mathrm{pr}_a(v)$ es un operador lineal y calcule su matriz P_a.

34. Rango de la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por un vector. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Demuestre que el rango de la matriz P_a es 1.

35. Matriz de la proyección ortogonal es la misma para dos vectores que generan a la misma recta. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ y sea $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demuestre que $P_{\mu a} = P_a$.

36. Propiedades de la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por un vector. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Demuestre las siguientes propiedades de la matriz P_a:

$$P_a^2 = P_a, \qquad P_a^\top = P_a, \qquad P_a a = a.$$

37. Producto de dos proyecciones ortogonales correspondientes a dos vectores ortogonales entre si. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tales que $a \perp b$. Simplifique las expresiones $P_a P_b$ y $(P_a + P_b)^2$.

Método modificado de Gram–Schmidt

38. Recuerde las fórmulas del algoritmo modificado de Gram–Schmidt.

39. Algoritmo modificado de Gram–Schmidt. Realice el algoritmo modificado de Gram–Schmidt en algún lenguaje de programación. Los vectores originales están dados como las columnas de una matriz A.

> Entrada: $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $m \ge n$.
>
> Salida: $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que las columnas de B son ortonormales y $B(:,j)$ es una combinación lineal de $A(:,k)$ con $1 \le k \le j$.

40. QR por medio del algoritmo modificado de Gram–Schmidt. En algún lenguaje de programación escriba una función que regrese una factorización QR reducida de una matriz dada, suponiendo el rango de la matriz coincide con el número de sus columnas. Utilice el algoritmo modificado de Gram–Schmidt.

41. Tema para exponer. Muestre con un ejemplo que el método de Gram–Schmidt con redondeo puede generar errores grandes.

Reflexiones ortogonales (reflexiones de Householder)

42. Reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio. Sean $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Deduzca una fórmula para la reflexión ortogonal del vector v con respecto al hipersubespacio $\{a\}^\perp$. Denotemos por H_a a la matriz del operador lineal correspondiente. Exprese H_a en términos de P_a.

43. Propiedades de la reflexión ortogonal. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Exprese la matriz H_a en términos de a y demuestre las siguientes propiedades de la matriz H_a:

$$H_a^2 = I_n, \qquad H_a^\top = H_a, \qquad H_a^\top H_a = I_n, \qquad H_a a = a.$$

44. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ y sea $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demuestre que

$$H_{\mu a} = H_a.$$

45. Sobre las diagonales de un rombo. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|a\|_2 = \|b\|_2$. Demuestre que $a + b \perp a - b$.

46. Reflexión ortogonal que transforma un vector no nulo en otro vector de la misma longitud. Sean $f, g \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|f\|_2 = \|g\|_2 > 0$ y $f \neq g$. Encuentre un vector $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que $H_a f = g$.

47. Reflexión de Householder que transforma el vector dado en un múltiplo positivo del vector básico e_1. Sea $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que $f \neq \|f\|_2 e_1$. Construya un vector $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que

$$H_a f = \|f\|_2 e_1, \qquad \text{esto es,} \qquad H_a f = \big[\|f\|_2, 0, \ldots, 0\big]^\top.$$

48. Algoritmo householdervector (repaso). En algún lenguaje de programación realice el algoritmo que calcule el vector a del problema anterior.

Entrada: un vector $f \in \mathbb{R}^n$ tal que $f \neq \|f\| e_1$.

Salida: un vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $H_a f = \|f\|_2 e_1$.

49. Número de operaciones en el algoritmo householdervector. Calcule el número de operaciones aritméticas (en la aritmética con punto flotante) en el algoritmo anterior. Puede suponer que el cálculo de la raíz cuadrada positiva es una función dada que necesita C_1 flops.

50. Sea $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Pongamos

$$\mu := \begin{cases} \|f\|_2, & \text{si } f_1 > 0; \\ -\|f\|_2, & \text{si } f_1 \leq 0. \end{cases}$$

Construya un vector $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que

$$H_a f = -\mu e_1, \qquad \text{esto es,} \qquad H_a f = \big[-\mu, 0, \ldots, 0\big]^\top.$$

Construcción de la descomposición QR por medio de reflexiones de Householder

51. Primer paso de la reducción de una matriz por medio de reflexiones ortogonales. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A_{*,1} \neq \|A_{*,1}\|e_1$. Construya un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que la matriz $B = H_v A$ tenga la propiedad $B_{*,1} = \|A_{*,1}\|e_1$. Explique cómo calcular la matriz B de manera eficiente.

52. Paso número p de la reducción de una matriz por medio de reflexiones ortogonales. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $p \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tales que $A(p : m, 1 : (p-1)) = 0$. Construya un vector $v \in \mathbb{R}^{m-p+1}$ tal que la matriz $B = H_v A(p : m, 1 : n)$ tenga la propiedad $B(:, 1) = \|A(p : m, p)\|e_1$. Explique cómo calcular la matriz B de manera eficiente.

53. Una parte del algoritmo QR: construcción de la matriz R. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Explique cómo transformar A en una matriz triangular superior por medio de reflexiones ortogonales. Realice el algoritmo en un lenguaje de programación, haga pruebas y analice cómo se cambia el tiempo de ejecución del algoritmo dependiendo de n (con $m = n$ o $m = 2n$).

54. Algoritmo QR. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Explique cómo construir una matriz $Q \in O(m, \mathbb{R})$ y una matriz triangular superior $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tales que $A = QR$. Haga pruebas y analice cómo se cambia el tiempo de ejecución del algoritmo dependiendo de n (con $m = n$ o $m = 2n$).

55. Número de operaciones aritméticas. Calcule el número de multiplicaciones en el algoritmo anterior suponiendo que el algoritmo householdervector aplicado a un vector de longitud q realiza $C_1 q + C_2$ operaciones.

56. Pasar de QR completa a QR reducida (delgada). En el caso si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con $m > n$, el algoritmo QR produce un par de matrices (Q, R) tales que

$$Q \in O(m, \mathbb{R}), \qquad R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad (\forall j \geq k \quad R_{j,k} = 0).$$

Formamos las matrices $\tilde{Q}$ y $\tilde{R}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{Q} = Q_{*,\{1,\ldots,n\}}, \qquad \tilde{R} = R_{\{1,\ldots,n\},*}.$$

En el lenguaje de MATLAB,

```
Qtilde = Q(:, 1 : n);
Rtilde = R(1 : n, :);
```

Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$, entonces Q y R son de la forma, y las submatrices $\tilde{Q}$ y $\tilde{R}$ están marcadas con verde:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ 0 & R_{2,2} & R_{2,3} \\ 0 & 0 & R_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $A = \tilde{Q}\tilde{R}$.

57. Algoritmo qrthin. Usando la función programada anteriormente que realiza la descomposición QR escriba una función **qrthin** que construya la descomposición QR reducida de una matriz dada.

Unicidad de la descomposición QR

En este subtema se considera solamente el caso de matrices cuadradas.

58. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz normal ($A^\top A = AA^\top$) y al mismo tiempo triangular superior. Demuestre que A es diagonal.

59. Muestre que cada matriz ortogonal es normal.

60. Describa la clase de las matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que al mismo tiempo son ortogonales, triangulares superiores y tienen entradas diagonales positivas.

61. Recuerde la demostración del teorema que las matrices ortogonales forman un grupo.

62. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior. Demuestre que A es invertible si y sólo si $A_{i,i} \neq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

63. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior invertible. Demuestre que su inversa A^{-1} también es triangular superior.

64. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada invertible, sean $Q_1, Q_2 \in O(n, \mathbb{R})$ y $R_1, R_2 \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ tales que $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$, y las entradas diagonales de R_1 y R_2 son estrictamente positivas. Demuestre que $Q_1 = Q_2$ y $R_1 = R_2$.

Otros métodos para construir la factorización QR

65. Tema para exponer. Muestre cómo construir una factorización QR usando matrices de rotación (rotaciones de Givens).

Aplicación de la descomposición QR a la solución de sistemas de ecuaciones lineales

66. Algoritmo solveut (repaso). Escriba un algoritmo que resuelva los sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ux = b$, donde U es una matriz cuadrada triangular superior con entradas diagonales no nulas. Puede trabajar con entradas o usar operaciones de nivel 1 (el producto interno de vectores o la operación saxpy).

> Entrada: una matriz U triangular superior con entradas diagonales no nulas, un vector b cuya longitud coincide con el orden de la matriz U.
>
> Salida: un vector x tal que $Ux = b$.

Se recomienda programar 4 versiones del algoritmo:

1. Que use el producto interno (nivel 1).

2. Que trabaje con entradas (nivel 0) y lea las entradas de U por renglones. Este algoritmo se obtiene del algoritmo del inciso 1 al sustituir el producto interno por un ciclo.

3. Que use la operación saxpy (nivel 1), es decir, que haga operaciones lineales con fragmentos de columnas de U.

4. Que trabaje con entradas (nivel 0) y lea las entradas de U por columnas. Este algoritmo se obtiene del algoritmo del inciso 3 al sustituir la operación saxpy por un ciclo.

67. Pruebas del algoritmo solveut. Haga pruebas de los 4 algoritmos del problema anterior, primero con matrices de órdenes pequeños, luego con matrices aleatorias de órdenes grandes. Analice cómo se cambia el tiempo de ejecución dependiendo de n. Compare la velocidad de las 4 versiones del algoritmo.

68. Número de operaciones aritméticas en el algoritmo solveut. Calcule el número de multiplicaciones en alguna de las versiones del algoritmo solveut.

69. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada invertible y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Explique cómo resolver el sistema $Ax = b$ usando la factorización QR de la matriz A. Escriba el algoritmo correspondiente y calcule el número de multiplicaciones.

Proyección ortogonal y complemento ortogonal (repaso de la teoría que se ve en cursos de álgebra lineal y análisis)

70. Ortogonalidad de vectores como una relación binaria. Recuerde la definición de la relación binaria $\perp$. Determine si $\perp$ es reflexiva; simétrica; transitiva.

71. Complemento ortogonal de un conjunto de vectores. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Explique el sentido de la notación $X^\perp$. Demuestre que $X^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

72. Complemento ortogonal del subespacio generado por un conjunto de vectores. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por S al subespacio generado por X. Demuestre que $S^\perp = X^\perp$.

73. Teorema: relación entre la proyección ortogonal y el elemento más cercano. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$, sea $b \in \mathbb{R}^n$ y sea $p \in S$. Demuestre que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $p - b \perp S$;

(b) $\|p - v\| \leq \|s - v\|$ para cada $s \in S$.

74. Teorema: existencia y unicidad del elemento más cercano en un conjunto convexo. Sea A un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que existe un único vector $p \in A$ tal que para cada $q \in A$

$$\|p - v\| \leq \|q - v\|.$$

75. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Explique por qué S puede hacer el papel del conjunto A del teorema anterior; enuncie el resultado para S en vez de A.

76. Proyección ortogonal de un vector a un subespacio. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Usando los resultados de los problemas anteriores demuestre que existe un único par de vectores (u, w) tales que

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad b = u + w.$$

En otras palabras, el espacio $\mathbb{R}^n$ es la suma directa de S y $S^\perp$.

77. Complemento ortogonal del complemento ortogonal de un subespacio. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $(S^\perp)^\perp = S$.

78. Complemento ortogonal del complemento ortogonal de un conjunto de vectores. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Encuentre $(X^\perp)^\perp$.