Ajuste polinomial

Objetivos. Mostrar que el problema de ajuste polinomial y el problema de ajuste trigonométrico, en los cuales se minimiza el error cuadrático, son casos particulares del problema de mínimos cuadrados.

Requisitos. Problema de mínimos cuadrados, matriz de Vandermonde, matriz de valores de monomios trigonométricos.

1. Problema de mínimos cuadrados (repaso breve). Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{r}(A) = m \le n$, y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Se busca el mínimo (global estricto) de la función

$$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|Ax - b\|^2.$$

Ya vimos en las clases pasadas que el problema se resuelve fácilmente al hallar una factorización QR de la matriz A.

Ajuste polinomial

2. Problema de ajuste polinomial. Están dados algunos números reales $x_1, \ldots, x_n$ diferentes a pares y algunos números reales $y_1, \ldots, y_n$ arbitrarios. También está dado un número $m \le n$. Se busca un polinomio de grado $< m$, es decir, un polinomio de la forma

$$P_c(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k t^{k-1},$$

tal que se minimice el error cuadrático

$$\sum_{j=1}^{n} (P_c(x_k) - y_k)^2.$$

Notamos que los números x_k están dados y fijos, y las íncognitas son los coeficientes $c_1, \ldots, c_m$. En otras palabras, la función que queremos minimizar es

$$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \qquad f(c) := \sum_{j=1}^{n} (P_c(x_j) - y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_j^{k-1} - y_j \right)^2.$$

3. Reducción del problema de ajuste polinomial al problema de mínimos cuadrados. Denotemos por $V_m(x_1, \ldots, x_n)$ a la matriz de Vandermonde de m columnas asociada a los puntos $x_1, \ldots, x_n$:

$$V_m(x) = V_m(x_1, \ldots, x_n) = \left[x_j^{k-1} \right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

Entonces, como ya vimos antes, el vector $P_c(x)$ de los valores del polinomio P_c en los puntos $x_1, \ldots, x_m$ es

$$P_c(x) = \big[P_c(x_j)\big]_{j=1}^n = V_m(x)c,$$

y la función f se escribe como

$$f(c) = \big(V_m(x)c - y\big)^2.$$

El problema de minimización de esta función es el problema de mínimos cuadrados, donde la matriz A es $V_m(x)$ y el vector del lado derecho es y. Otra vez emfatizamos que la notación es diferente de la notación en el Problema 1: ahora el vector x es fijo y participa en la construcción de la matriz A, y el vector incógnito es c.

4. Teorema (sobre la existencia y unicidad de solución del problema de ajuste polinomial). Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números reales diferentes a pares, sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números reales, y sea $m \le n$. Entonces la matriz $V_m(x)$ es de rango m, existe un único vector c en $\mathbb{R}^m$ que minimiza la función

$$f(c) = \sum_{j=1}^n \left(P_c(x_j) - y_j\right)^2.$$

Idea de demostración. En la matriz $V_m(x)$ la submatriz ubicada en los primeros m renglones es $V_m(x_1, \ldots, x_m)$, y el determinante de esta matriz de Vandermonde es distinto de cero porque los números $x_1, \ldots, x_m$ son diferentes a pares. Luego el rango de esta submatriz es m, y el rango de la matriz original no puede ser menor que el rango de la submatriz. Por otro lado, $V_m(x)$ tiene m columnas. Por lo tanto el rango de $V_m(x)$ también es m. Ahora el teorema sale como un corolario del teorema sobre la existencia y unicidad de solución del problema de mínimos cuadrados. $\square$

Ajuste trigonométrico

5. El problema de ajuste trigonométrico. Sea $[\alpha, \beta]$ un intervalo de longitud menor que 2π. Están dados algunos números $x_1, \ldots, x_n \in [\alpha, \beta]$, algunos números reales $y_1, \ldots, y_n$ arbitrarios y un número q tal que $2q+1 \le n$. Denotemos $2q+1$ por m. Se busca un vector c en $\mathbb{R}^m$ que minice la función

$$f(c) \coloneqq \sum_{j=1}^n \left(c_1 + \sum_{k=1}^q c_{k+1}\cos(kx_j) + \sum_{k=1}^q c_{q+k+1}\operatorname{sen}(kx_j) - y_j\right)^2.$$

En otras palabras, a cada vector c en $\mathbb{R}^m$ le asociamos el polinomio trigonométrico

$$T_c(t) \coloneqq c_1 + \sum_{k=1}^q c_{k+1}\cos(kt) + \sum_{k=1}^q c_{q+k+1}\operatorname{sen}(kt),$$

y queremos minimizar la función

$$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \qquad f(c) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \bigl(T_c(x_j) - y_j\bigr)^2.$$

6. Reducción del problema de ajuste trigonométrico al problema de mínimos cuadrados. Denotemos por $T_c(x)$ al vector de los valores del polinomio trigonométrico T_c en los puntos $x_1, \ldots, x_n$:

$$T_c(x) = \bigl[T_c(x_j)\bigr]_{j=1}^{n}.$$

Entonces

$$T_c(x) = W_q(x)c,$$

donde $W_q(x)$ es la matriz

$$W_q(x) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(x_1) & \ldots & \cos(qx_1) & \operatorname{sen}(x_1) & \ldots & \operatorname{sen}(qx_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(x_n) & \ldots & \cos(qx_n) & \operatorname{sen}(x_n) & \ldots & \operatorname{sen}(qx_n) \end{bmatrix}.$$

La condiciones escritas arriba garantizan que el rango de esta matriz es $2q + 1$.

Problema de ajuste lineal en forma general

7. Están dadas algunas funciones $b_1, \ldots, b_m$, algunos números $x_1, \ldots, x_n$ diferentes a pares, y algunos números $y_1, \ldots, y_n$ arbitrarios. Para cualquier vector de coeficientes c en $\mathbb{R}^m$ definimos g_c como la combinación lineal de las funciones $b_1, \ldots, b_m$ con los coeficientes $c_1, \ldots, c_m$:

$$g_c(t) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} c_k b_k(t).$$

Denotamos por $g_c(x)$ al vector de los valores de g_c en los puntos $x_1, \ldots, x_n$:

$$g_c(x) \coloneqq \bigl[g_c(x_j)\bigr]_{j=1}^{n}.$$

Se busca el vector de coeficientes c que minimice la función

$$f(c) \coloneqq \|g_c(x) - y\|^2.$$

Notamos que $g_c(x)$ se puede escribir como

$$g_c(x) = G_m(x)c,$$

donde $G_m(x)$ es la matriz de los valores de las funciones $g_1, \ldots, g_m$ en los puntos $x_1, \ldots, x_n$:

$$G_m(x) = \bigl[g_k(x_j)\bigr]_{j,k=1}^{n,m}.$$

Si $n \geq m$ y el rango de $G_m(x)$ es m, entonces f tiene un único punto mínimo global estricto.