Proyección ortogonal sobre el subespacio dado por una lista ortogonal (un tema del curso “Álgebra Lineal Numérica”)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

27 de abril de 2021

Objetivo: dados una lista ortogonal de vectores no nulos $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{R}^n$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$, denotamos $S := \ell(q_1, \ldots, q_m)$ y queremos encontrar

$$u \in S, \qquad w \in S^{\perp} \qquad \text{tales que} \qquad v = u + w.$$

Prerrequisitos:

- criterio de ortogonalidad de un vector al subespacio generado por una lista de vectores,
- listas ortogonales de vectores,
- coeficientes de una combinación lineal de una lista ortogonal de vectores,
- proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por un vector no nulo.

Algunas aplicaciones

(no las veremos en este tema)

- Proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt.
- Descomposición QR de matrices.
- Solución del problema de mínimos cuadrados.
- Solución del problema del mejor ajuste.
- Desigualdad de Bessel.
- Propiedades de series de Fourier.
- Muchas aplicaciones en la teoría de operadores.

Ortogonalidad de vectores (repaso)

Consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto punto:

$$\langle a, b \rangle = b^\top a = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Ortogonalidad de vectores (repaso)

Consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto punto:

$$\langle a, b \rangle = b^\top a = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Dados a, b en $\mathbb{R}^n$, se dice que a y b son ortogonales entre si y se escribe $a \perp b$, si

$$\langle a, b \rangle = 0.$$

Ortogonalidad de vectores (repaso)

Consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto punto:

$$\langle a, b\rangle = b^\top a = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Dados a, b en $\mathbb{R}^n$, se dice que a y b son ortogonales entre si y se escribe $a \perp b$, si

$$\langle a, b\rangle = 0.$$

Como $\langle b, a\rangle = \langle a, b\rangle$, la relación $\perp$ es simétrica:

$$b \perp a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \perp b.$$

La identidad de Pythagoras (repaso)

Recordamos que la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

La identidad de Pythagoras (repaso)

Recordamos que la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ tales que $a \perp b$. Entonces

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

La identidad de Pythagoras (repaso)

Recordamos que la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ tales que $a \perp b$. Entonces

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Demostración.

$$\|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

El complemento ortogonal de un conjunto (repaso)

Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

$$Y^\perp = \{z \in \mathbb{R}^n\colon \quad \forall y \in Y \quad z \perp y\}.$$

En vez de escribir $z \in Y^\perp$ también se escribe $z \perp Y$.

Ejercicio. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que $Y^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

El subespacio generado por una lista de vectores (repaso)

Sean $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$.

Denotemos por S al subespacio vectorial generado por $a_1, \ldots, a_m$:

$$S := \ell(a_1, \ldots, a_m),$$

Este subespacio consiste de todas las combinaciones lineales de $a_1, \ldots, a_m$:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \quad x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\}.$$

Se sabe que S es el mínimo entre los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ que contienen $a_1, \ldots, a_m$.

Criterio de ortogonalidad de un vector al subespacio generado por una lista de vectores (repaso)

Proposición

Sean $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$v \in S^\perp \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad v \perp a_j.$$

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^{\perp}$.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^\perp$.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $v \in \{a_1, \ldots, a_m\}^\perp$.

Sea $x \in S$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^{\perp}$.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $v \in \{a_1, \ldots, a_m\}^{\perp}$.

Sea $x \in S$. Encontramos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^\perp$.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $v \in \{a_1, \ldots, a_m\}^\perp$.

Sea $x \in S$. Encontramos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Entonces

$$\langle v, x \rangle = \left\langle v, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v, a_k \rangle = 0.$$

Listas ortogonales de vectores (repaso)

Sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista de vectores en $\mathbb{R}^n$.

Se dice que esta lista es ortogonal si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad (j \neq k) \quad \Longrightarrow \quad \langle a_j, a_k \rangle = 0.$$

Listas ortonormales de vectores (repaso)

Sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista de vectores en $\mathbb{R}^n$.
Se dice que esta lista es ortonormal si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

En otras palabras, $a_1, \ldots, a_m$ es una lista ortonormal si cumple simultáneamente las siguientes dos condiciones:

1. $a_1, \ldots, a_m$ es ortogonal,
2. para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad \|a_j\| = 1$.

Los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales se expresan en términos de productos internos

Proposición

Sea $a_1, \ldots, a_m$ *una lista ortogonal de vectores no nulos, y sean* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$*.*
Consideremos el vector

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Entonces para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$*,*

$$\lambda_j = \frac{\langle v, a_j \rangle}{\|a_j\|^2}.$$

Proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por un vector no nulo (repaso)

Proposición

Sean $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, $v \in \mathbb{R}^n$. *Denotemos* $\ell(a)$ *por* S.

Entonces existe un único par (u, w) *tal que*

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad u + w = v.$$

Más aún, u *y* w *están dados por*

$$u = \frac{\langle v, a\rangle}{\|a\|^2}\, a, \qquad w = v - \frac{\langle v, a\rangle}{\|a\|^2}\, a.$$

Teorema

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $v \in \mathbb{R}^n$*.*
Denotemos por S *al subespacio vectorial generado por* $q_1, \ldots, q_m$*:*

$$S := \ell(q_1, \ldots, q_m).$$

Entonces existe un único par de vectores (u, w) *tal que*

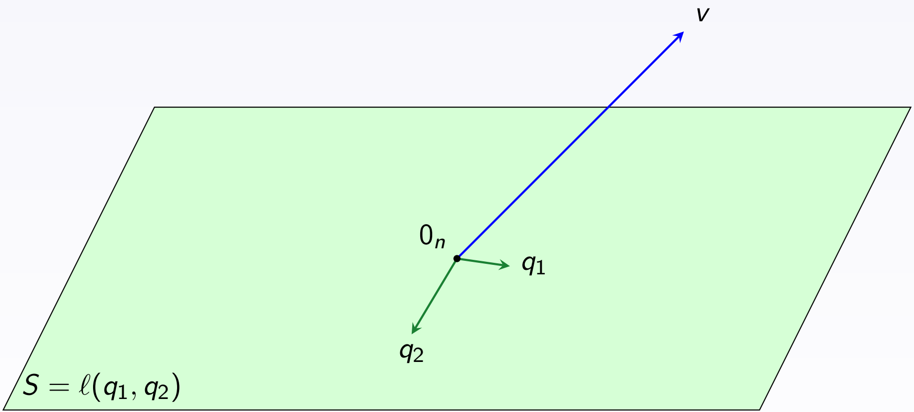
$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad v = u + w. \tag{1}$$

Más aún, u *y* w *tienen las siguientes expresiones:*

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w = v - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k. \tag{2}$$

Un dibujo para $n = 3$, $m = 2$

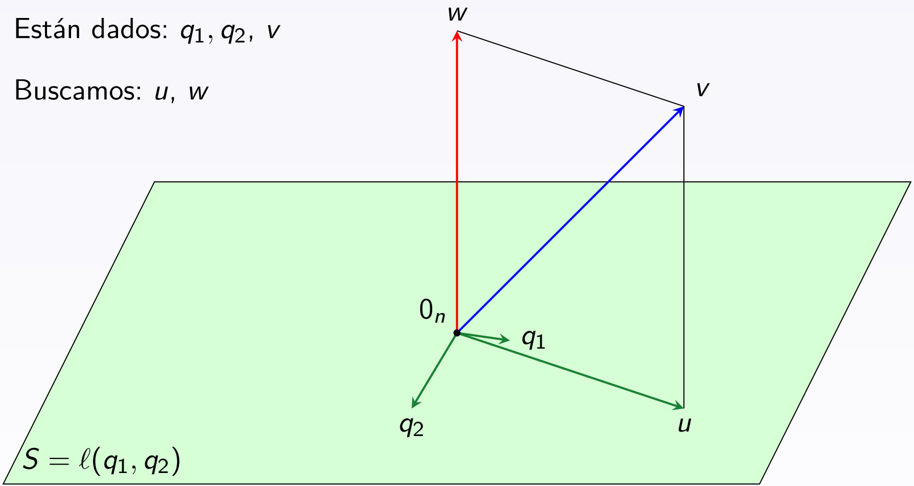
Están dados: q_1, q_2, v



Un dibujo para $n = 3$, $m = 2$

Están dados: q_1, q_2, v

Buscamos: u, w



Otra forma del mismo teorema

Teorema

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$ que tiene una base ortonormal $(q_1, \ldots, q_m)$, y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para $u, w \in \mathbb{R}^n$, las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad v = u + w, \tag{1}$$

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w = v - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k. \tag{2}$$

Unicidad, esto es, (1)$\Rightarrow$(2)

Supongamos que u y w satisfacen (1): $\quad u \in S, \quad w \in S^{\perp}, \quad v = u + w.$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Supongamos que u y w satisfacen (1): $\quad u \in S, \quad w \in S^{\perp}, \quad v = u + w.$

Como $u \in S$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Por la proposición sobre los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales,

$$\lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

Esta fórmula todavía no es buena porque el vector u es desconocido.

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k\rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k\rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k\rangle = \langle u, q_k\rangle + \langle w, q_k\rangle = \langle u + w, q_k\rangle = \langle v, q_k\rangle, \qquad \boxed{\lambda_k = \frac{\langle v, q_k\rangle}{\|q_k\|^2}.}$$

Por lo tanto,

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k\rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w = v - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k\rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k. \tag{2}$$

Conclusión: si u, w satisfacen (1), entonces u y w deben ser los vectores (2).

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle q_k, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \lambda_k \|q_j\|^2 = 0.$$

Como $S = \ell(q_1, \ldots, q_m)$,

$$w \in S^\perp.$$

Corolario

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $v \in \mathbb{R}^n$*.*
Denotemos por S *al subespacio vectorial generado por* $q_1, \ldots, q_m$*:*

$$S := \ell(q_1, \ldots, q_m).$$

Definimos u *como*

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2} \, q_k.$$

Entonces u *es el único elemento de* S *más cercano a* v*, esto es,*

$$\forall s \in S \setminus \{u\} \qquad \|s - v\| > \|u - v\|.$$

Demostración del corolario

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$, $u - v = w \in S^{\perp}$, tenemos $\langle s - u, u - v \rangle = 0$.

Aplicamos la identidada de Pitágoras:

$$\|s - v\|^2 = \|(s - u) + (u - v)\|^2 = \|s - u\|^2 + \|u - v\|^2 > \|u - v\|^2.$$

La desigualdad de Bessel finita

Corolario

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $v \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, q_k \rangle|^2}{\|q_k\|^2} \leq \|v\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \|u\|^2 + \|w\|^2 \\
&\geq \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\lambda_k q_k\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \|q_k\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, q_k\rangle|^2}{\|q_k\|^4} \|q_k\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, q_k\rangle|^2}{\|q_k\|^2}.
\end{aligned}$$

La matriz de proyección ortogonal sobre S

En la notación del teorema, definimos la matriz $P_{q_1,\ldots,q_m}$ mediante la siguiente regla:

$$P_{q_1,\ldots,q_m} := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\|q_k\|^2}\, q_k\, q_k^\top.$$

Si $v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$(q_k\, q_k^\top)\, v = q_k(q_k^\top v) = (q_k^\top v)q_k = \langle v, q_k\rangle\, q_k.$$

Luego

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k\rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k = u.$$

La matriz de la proyección ortogonal sobre S

En las clases pasadas denotamos por P_a la matriz de la proyección ortogonal sobre $\ell(a)$:

$$P_a := \frac{1}{\|a\|^2}\, a\, a^\top .$$

La fórmula

$$P_{q_1,\ldots,q_m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\|q_k\|^2}\, q_k\, q_k^\top$$

significa que

$$P_{q_1,\ldots,q_m} = \sum_{k=1}^{m} P_{q_k}.$$

La matriz de la proyección ortogonal se determina por el subespacio

Recordemos que las propiedades de u y w en el teorema están escritos en términos de S y v.

Si $(q_1, \ldots, q_m)$ y $(b_1, \ldots, b_m)$ son dos bases ortogonales de S, entonces para cada v en $\mathbb{R}^n$ tenemos

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v = u, \qquad P_{b_1,\ldots,b_m} v = u.$$

En efecto, u se determina por v y S y no depende de la elección de la base.

Esto implica que

$$P_{q_1,\ldots,q_m} = P_{b_1,\ldots,b_m}.$$

Por lo tanto, en vez de $P_{q_1,\ldots,q_m}$ se puede escribir P_S, donde $S = \ell(q_1, \ldots, q_m)$.

La matriz de Gram y la normalidad

Dada una lista de vectores $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{R}^m$,
formamos de estos vectores una matriz (escribimos los vectores como columnas):

$$Q = [q_1, \ldots, q_m].$$

Como vimos en temas anteriores, la matriz de Gram de la lista $q_1, \ldots, q_m$ se escribe fácilmente en términos de Q:

$$\underbrace{\big[\langle q_j, q_k \rangle\big]_{j,k=1}^{m}}_{G(q_1,\ldots,q_m)} = Q^\top Q.$$

Por lo tanto,

$$q_1, \ldots, q_m \text{ es una lista ortonormal} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q^\top Q = I_m.$$

Fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m}$ en el caso de vectores ortonormales

Por simplicidad, consideremos el caso de vectores ortonormales $q_1, \ldots, q_m$.

Denotamos por Q la matriz formada por estos vectores (como columnas).

Proposición

Sea $Q = [q_1, \ldots, q_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *tal que* $Q^\top Q = I_m$.

Sea $S = \ell(q_1, \ldots, q_m)$*. Denotemos por* P *la proyección ortogonal sobre* S*.*

Entonces

$$P = QQ^\top.$$

Demostración

Sabemos que

$$P = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^\top .$$

Sean $r, s \in \{1, \ldots, n\}$.

$$(QQ^\top)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} (Q^\top)_{k,s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} Q_{s,k},$$

$$P = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^\top .$$

$$P_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k q_k^\top)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k)_r (q_k)_s = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} Q_{s,k} .$$

Propiedades de la matriz $QQ^\top$

Proposición

Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *tal que* $Q^\top Q = I_m$ *y sea*

$$P := QQ^\top.$$

Denotamos por $q_1, \ldots, q_m$. *Pongamos* $S := \ell(q_1, \ldots, q_m)$.

Entonces P *tiene las siguientes propiedades:*

- $P^2 = P$,
- $P^\top = P$,
- $Pv \in S$ *para cada* v *en* S.
- $Px = x$ *para cada* x *en* S,
- $v - Pv \in S^\perp$ *para cada* v *en* $\mathbb{R}^n$.

Una parte de demostración

Estas propiedades se pueden probar usando el teorema (sobre la descomposición ortogonal), pero también se pueden probar de manera directa.

Una parte de demostración

Estas propiedades se pueden probar usando el teorema (sobre la descomposición ortogonal), pero también se pueden probar de manera directa.

Dado v en $\mathbb{R}^n$, sea

$$\lambda \coloneqq Q^\top v.$$

Una parte de demostración

Estas propiedades se pueden probar usando el teorema (sobre la descomposición ortogonal), pero también se pueden probar de manera directa.

Dado v en $\mathbb{R}^n$, sea

$$\lambda \coloneqq Q^\top v.$$

En otras palabras, λ es el vector de los productos internos de las columnas de Q con v:

$$\lambda_k = (Q^\top)_{k,*} v = (Q_{*,k})^\top v = \langle v, q_k \rangle.$$

Una parte de demostración

Estas propiedades se pueden probar usando el teorema (sobre la descomposición ortogonal), pero también se pueden probar de manera directa.

Dado v en $\mathbb{R}^n$, sea

$$\lambda := Q^\top v.$$

En otras palabras, λ es el vector de los productos internos de las columnas de Q con v:

$$\lambda_k = (Q^\top)_{k,*} v = (Q_{*,k})^\top v = \langle v, q_k \rangle.$$

Entonces

$$(QQ^\top)v = Q(Q^\top v) = Q\lambda =$$

Una parte de demostración

Estas propiedades se pueden probar usando el teorema (sobre la descomposición ortogonal), pero también se pueden probar de manera directa.

Dado v en $\mathbb{R}^n$, sea

$$\lambda := Q^\top v.$$

En otras palabras, λ es el vector de los productos internos de las columnas de Q con v:

$$\lambda_k = (Q^\top)_{k,*} v = (Q_{*,k})^\top v = \langle v, q_k \rangle.$$

Entonces

$$(QQ^\top)v = Q(Q^\top v) = Q\lambda = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k$$

Una parte de demostración

Estas propiedades se pueden probar usando el teorema (sobre la descomposición ortogonal), pero también se pueden probar de manera directa.

Dado v en $\mathbb{R}^n$, sea

$$\lambda := Q^\top v.$$

En otras palabras, λ es el vector de los productos internos de las columnas de Q con v:

$$\lambda_k = (Q^\top)_{k,*} v = (Q_{*,k})^\top v = \langle v, q_k \rangle.$$

Entonces

$$(QQ^\top)v = Q(Q^\top v) = Q\lambda = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k \in S.$$

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Es suficiente demostrar que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad v - QQ^\top v \perp q_j$.

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Es suficiente demostrar que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad v - QQ^\top v \perp q_j$.

Además, $QQ^\top Q = QI_m = Q$, luego

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Es suficiente demostrar que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad v - QQ^\top v \perp q_j$.

Además, $QQ^\top Q = QI_m = Q$, luego

$$QQ^\top q_j =$$

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Es suficiente demostrar que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad v - QQ^\top v \perp q_j$.

Además, $QQ^\top Q = QI_m = Q$, luego

$$QQ^\top q_j = QQ^\top Q_{*,j} =$$

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Es suficiente demostrar que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad v - QQ^\top v \perp q_j$.

Además, $QQ^\top Q = QI_m = Q$, luego

$$QQ^\top q_j = QQ^\top Q_{*,j} = (QQ^\top Q)_{*,j} =$$

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Es suficiente demostrar que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad v - QQ^\top v \perp q_j$.

Además, $QQ^\top Q = QI_m = Q$, luego

$$QQ^\top q_j = QQ^\top Q_{*,j} = (QQ^\top Q)_{*,j} = Q_{*,j} = q_j.$$

Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle v - (QQ^\top)v, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle QQ^\top v, q_j \rangle =$$

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Es suficiente demostrar que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad v - QQ^\top v \perp q_j$.

Además, $QQ^\top Q = QI_m = Q$, luego

$$QQ^\top q_j = QQ^\top Q_{*,j} = (QQ^\top Q)_{*,j} = Q_{*,j} = q_j.$$

Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle v - (QQ^\top)v, q_j\rangle = \langle v, q_j\rangle - \langle QQ^\top v, q_j\rangle = \langle v, q_j\rangle - \langle v, QQ^\top q_j\rangle =$$

Una parte de demostración

Dado v en $\mathbb{R}^n$, mostremos directamente que $v - QQ^\top v \in S^\perp$.

Es suficiente demostrar que para cada j en $\{1, \dots, m\}$, $\quad v - QQ^\top v \perp q_j$.

Además, $QQ^\top Q = QI_m = Q$, luego

$$QQ^\top q_j = QQ^\top Q_{*,j} = (QQ^\top Q)_{*,j} = Q_{*,j} = q_j.$$

Más aún, para cada j en $\{1, \dots, m\}$,

$$\langle v - (QQ^\top)v, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle QQ^\top v, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle v, QQ^\top q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle v, q_j \rangle = 0.$$

Fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m} v$

$$Q = [q_1, \ldots, q_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad v \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces

$$Pv = (QQ^\top)v.$$

Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices,

$$Pv = Q(Q^\top v).$$

La última versión es más eficiente porque evita la multiplicación de matrices.

Fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m}v$, otra deducción

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k, \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \langle v, q_k \rangle = q_k^\top v.$$

Consideremos

$$\lambda = [\lambda_k]_{k=1}^{m} =$$

Fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m} v$, otra deducción

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k, \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \langle v, q_k \rangle = q_k^\top v.$$

Consideremos

$$\lambda = [\lambda_k]_{k=1}^{m} = \begin{bmatrix} q_1^\top v \\ q_2^\top v \\ \ldots \\ q_m^\top v \end{bmatrix} =$$

Fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m}v$, otra deducción

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k, \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \langle v, q_k \rangle = q_k^\top v.$$

Consideremos

$$\lambda = [\lambda_k]_{k=1}^{m} = \begin{bmatrix} q_1^\top v \\ q_2^\top v \\ \ldots \\ q_m^\top v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^\top \\ q_2^\top \\ \ldots \\ q_m^\top \end{bmatrix}}_{m\times n} v =$$

Fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m} v$, otra deducción

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k, \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \langle v, q_k \rangle = q_k^\top v.$$

Consideremos

$$\lambda = [\lambda_k]_{k=1}^{m} = \begin{bmatrix} q_1^\top v \\ q_2^\top v \\ \ldots \\ q_m^\top v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^\top \\ q_2^\top \\ \ldots \\ q_m^\top \end{bmatrix}}_{m \times n} v = Q^\top v.$$

Luego

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k =$$

Fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m}v$, otra deducción

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k, \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \langle v, q_k\rangle = q_k^\top v.$$

Consideremos

$$\lambda = [\lambda_k]_{k=1}^{m} = \begin{bmatrix} q_1^\top v \\ q_2^\top v \\ \ldots \\ q_m^\top v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^\top \\ q_2^\top \\ \ldots \\ q_m^\top \end{bmatrix}}_{m\times n} v = Q^\top v.$$

Luego

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k = [q_1, \ldots, q_m]\, \lambda =$$

Fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m} v$, otra deducción

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k, \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \langle v, q_k \rangle = q_k^\top v.$$

Consideremos

$$\lambda = \left[\lambda_k\right]_{k=1}^{m} = \begin{bmatrix} q_1^\top v \\ q_2^\top v \\ \ldots \\ q_m^\top v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^\top \\ q_2^\top \\ \ldots \\ q_m^\top \end{bmatrix}}_{m\times n} v = Q^\top v.$$

Luego

$$Pv = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k = \left[q_1, \ldots, q_m\right] \lambda = Q(Q^\top v).$$

Fórmula matricial para $[Pv_1, \ldots, Pv_r]$

Están dados

$$Q = [q_1, \ldots, q_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}, \qquad Q^\top Q = I_m,$$

$$V = [v_1, \ldots, v_r] \in \mathbb{R}^{n \times r}.$$

Entonces

$$[Pv_1, \ldots, Pv_r] =$$

Fórmula matricial para $[Pv_1, \ldots, Pv_r]$

Están dados

$$Q = [q_1, \ldots, q_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad Q^\top Q = I_m,$$

$$V = [v_1, \ldots, v_r] \in \mathbb{R}^{n\times r}.$$

Entonces

$$[Pv_1, \ldots, Pv_r] = P[v_1, \ldots, v_r] =$$

Fórmula matricial para $[Pv_1, \ldots, Pv_r]$

Están dados

$$Q = [q_1, \ldots, q_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}, \qquad Q^\top Q = I_m,$$

$$V = [v_1, \ldots, v_r] \in \mathbb{R}^{n \times r}.$$

Entonces

$$[Pv_1, \ldots, Pv_r] = P[v_1, \ldots, v_r] = PV =$$

Fórmula matricial para $[Pv_1, \ldots, Pv_r]$

Están dados

$$Q = [q_1, \ldots, q_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad Q^\top Q = I_m,$$

$$V = [v_1, \ldots, v_r] \in \mathbb{R}^{n\times r}.$$

Entonces

$$[Pv_1, \ldots, Pv_r] = P[v_1, \ldots, v_r] = PV = (QQ^\top)V.$$

Ejercicio. Contar el número de multiplicaciones para calcular

$$(QQ^\top)V, \qquad Q(Q^\top V).$$

¿Qué comprobaciones podemos hacer para u y w?

Si $v \in \mathbb{R}^n$ y los vectores u y w se calculan como

$$u = QQ^\top v, \qquad w = v - u,$$

entonces la propiedad $u + w = v$ se cumple de manera trivial.

¿Qué comprobaciones podemos hacer para u y w?

Si $v \in \mathbb{R}^n$ y los vectores u y w se calculan como

$$u = QQ^\top v, \qquad w = v - u,$$

entonces la propiedad $u + w = v$ se cumple de manera trivial.

Los productos internos $\langle w, q_k \rangle$ se pueden escribir como un vector:

$$\left[\langle w, q_k \rangle\right]_{k=1}^{m} =$$

¿Qué comprobaciones podemos hacer para u y w?

Si $v \in \mathbb{R}^n$ y los vectores u y w se calculan como

$$u = QQ^\top v, \qquad w = v - u,$$

entonces la propiedad $u + w = v$ se cumple de manera trivial.

Los productos internos $\langle w, q_k \rangle$ se pueden escribir como un vector:

$$\left[\langle w, q_k \rangle\right]_{k=1}^m = \left[q_k^\top w\right]_{k=1}^m =$$

¿Qué comprobaciones podemos hacer para u y w?

Si $v \in \mathbb{R}^n$ y los vectores u y w se calculan como

$$u = QQ^\top v, \qquad w = v - u,$$

entonces la propiedad $u + w = v$ se cumple de manera trivial.

Los productos internos $\langle w, q_k \rangle$ se pueden escribir como un vector:

$$\big[\langle w, q_k \rangle\big]_{k=1}^{m} = \big[q_k^\top w\big]_{k=1}^{m} = Q^\top w.$$

¿Qué comprobaciones podemos hacer para u y w?

Si $v \in \mathbb{R}^n$ y los vectores u y w se calculan como

$$u = QQ^\top v, \qquad w = v - u,$$

entonces la propiedad $u + w = v$ se cumple de manera trivial.

Los productos internos $\langle w, q_k \rangle$ se pueden escribir como un vector:

$$\left[\langle w, q_k \rangle\right]_{k=1}^{m} = \left[q_k^\top w\right]_{k=1}^{m} = Q^\top w.$$

Además, como $u \in S$ y $w \in S^\perp$, debe cumplirse la identidad de Pitágoras:

$$\|u\|^2 + \|w\|^2 = \|v\|^2.$$

Programación de $P_{q_1,\ldots,q_m} v$, una solución ingenua

Dada $Q = [q_1, \ldots, q_m]$ en $\mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $Q^\top Q = I_m$ y dado v en $\mathbb{R}^n$, calculemos

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v.$$

Programación de $P_{q_1,\ldots,q_m} v$, una solución ingenua

Dada $Q = [q_1, \ldots, q_m]$ en $\mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $Q^\top Q = I_m$ y dado v en $\mathbb{R}^n$, calculemos

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v.$$

```
function [u] = orth_proj_subspace_orth_basis_naive(Q, v),
    n, m = size(Q); u = zeros(n, 1);
    for k = 1 : m,
        coef = Q(:, k)' * v;
        u = u + coef * Q(:, k);
    endfor
endfunction
```

Programación de $P_{q_1,\ldots,q_m} v$

```
function [u] = orth_proj_subspace_orth_basis(Q, v),
    u = Q * (Q' * v);
endfunction
```

¿Cómo generar listas de vectores ortonormales?

Para generar matrices Q con columnas ortonormales, llamamos la función `qr` que ya está realizada en el lenguaje de programación o en librerías estándares.

¿Cómo generar listas de vectores ortonormales?

Para generar matrices Q con columnas ortonormales, llamamos la función `qr` que ya está realizada en el lenguaje de programación o en librerías estándares.

Pronto vamos a programar varios algoritmos similares a `qr`.

¿Cómo generar listas de vectores ortonormales?

Para generar matrices Q con columnas ortonormales, llamamos la función `qr` que ya está realizada en el lenguaje de programación o en librerías estándares.

Pronto vamos a programar varios algoritmos similares a `qr`.

Uno de estos algoritmos es la ortonormalización de Gram y Schmidt.

Pruebas

```
function [er] = test_orth_proj_subspace_orth_basis(n, m),
    X = randn(n, m); [Q, R] = qr(X);
    v = randn(n, 1);
    u1 = orth_proj_subspace_orth_basis_naive(Q, v);
    u = orth_proj_subspace_orth_basis(Q, v);
    w = v - u;
    er1 = norm(u1 - u);
    er2 = norm(Q' * w);
    er3 = abs(u' * u + w' * w - v' * v);
    er = [er1, er2, er3];
endfunction
```