Proyección ortogonal sobre un vector normalizado (ejercicios teóricos simples)

Objetivos. Deducir fórmulas para la proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por un vector normalizado; definir el operador correspondiente, hallar la matriz correspondiente y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Matrices ortogonales, operaciones con matrices, producto punto en $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades.

1. El producto punto y la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Recordamos la definición del producto interno canónico (producto punto) en $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = x^\top y = \sum_{j=1}^{n} \boxed{}\,\boxed{}.$$

La norma euclidiana de x se denota por $\|x\|_2$ o solamente por $\|x\|$:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\boxed{}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \boxed{} \right)^{1/2}.$$

2. Vector normalizado. En todos los ejercicios de esta lista, por simplicidad, vamos a suponer que a es un vector *normalizado* en $\mathbb{R}^n$, esto es, la norma euclidiana de a es 1:

$$\|a\| = \|a\|_2 = \sqrt{\boxed{}^\top\,\boxed{}} = 1.$$

La condición que a es normalizado se puede escribir de la siguiente manera:

$$a^\top \boxed{} = 1.$$

Denotemos por $\ell(a)$ al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por a. En otras palabras, $\ell(a)$ es conjunto de los múltiplos del vector a:

$$\ell(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists \mu \in \mathbb{R} \quad x = \boxed{} \right\}.$$

Geométricamente, $\ell(a)$ es la recta que pasa por los puntos $\mathbf{0}_n$ y $\boxed{}$.

3. Deducción de la fórmula para la proyección ortogonal y el complemento ortogonal. Dados a, v en $\mathbb{R}^n$ con $\|a\| = 1$, estamos buscando dos vectores u, w en $\mathbb{R}^n$ con las siguientes propiedades:

- $u \in \ell(a)$, esto es, u es un $\square$ de a: $u = \square$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $a \perp w$, esto es, $a^\top \square = \square$.
- v es la suma de u y w: $\square + \square = \square$.

Expresamos w en términos de v y u, luego en términos de v, a y λ:

$$w = \square - \square = \square - \lambda \square .$$

Expresemos el producto $a^\top w$ en términos de a, v y λ.
Aplicamos la propiedad distributiva y homogénea de la multiplicación de matrices:

$$a^\top w = a^\top (\square) = a^\top \square - a^\top (\square) = a^\top \square - \square \left(a^\top \square\right).$$

Recordamos que a es normalizado: $a^\top a = \|\square\|^2 = \square$, así que

$$a^\top w = a^\top \square - \square . \tag{1}$$

Entonces

$$a \perp w \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^\top \square = \square \qquad \xLeftrightarrow{\text{formula (1)}} \qquad a^\top \square - \square = 0.$$

La última igualdad se cumple si y sólo si el escalar λ está elegido de la siguiente manera:

$$\lambda = \square^\top \square .$$

El vector $u := \lambda a$ es la *proyección ortogonal* de v sobre a, y el vector $w := v - u$ es el *complemento ortogonal*. Escribimos u en términos de los objetos originales, a y v:

$$u = (\square)\, a. \tag{2}$$

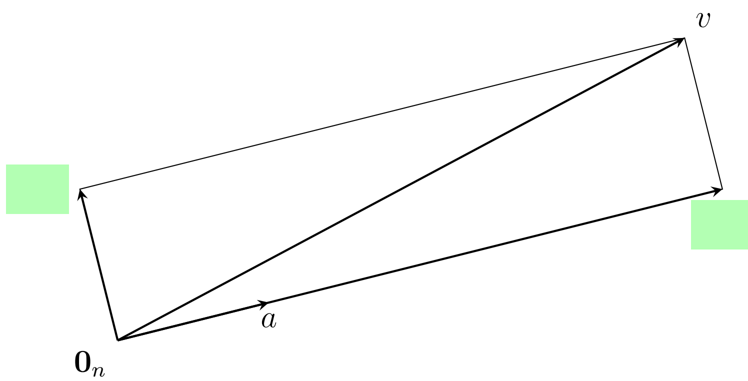
Escribimos w en términos de los objetos originales:

$$w = \square - (\square)\, \square . \tag{3}$$

Verifiquemos directamente que $a \perp w$:

$$\begin{aligned} a^\top w &= a^\top \Big(\square - (\square)\, \square \Big) = a^\top \square - a^\top (\square)\, \square \\ &= a^\top \square - \underbrace{(a^\top a)}_{\square} (\square) = a^\top \square - \square = \square . \end{aligned}$$

4. Dibujo para $\boldsymbol{n = 2}$.



5. Dos maneras de escribir el producto de un escalar por un vector. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$, entonces, por definición,

$$\lambda a \in \boxed{},$$

y para cada j de 1 a n la j-ésima componente de λa es

$$(\lambda a)_j \coloneqq \boxed{}\ \boxed{}.$$

Por otro lado, consideremos $a\lambda$ como un producto de matrices.
Notamos que a es de tamaño $\boxed{} \times \boxed{}$, λ es de tamaño $\boxed{} \times \boxed{}$.
Por eso el producto $a\lambda$ está bien definido y es de tamaño $\boxed{} \times \boxed{}$.
Calculamos la entrada general de este producto.
Primero aplicamos la fórmula general para las entradas del producto de matrices:

$$(a\lambda)_{j,1} = \sum_{k=1}^{\boxed{}} a_{j,k}\lambda_{k,1} = \underbrace{\boxed{}}_{a_{???,???}}\ \underbrace{\boxed{}}_{\lambda_{???,???}},$$

luego escribimos a_j en vez de $a_{j,1}$ y λ en vez de $\lambda_{1,1}$:

$$(a\lambda)_j = \underbrace{\boxed{}}_{a_{???}}\ \underbrace{\boxed{}}_{\lambda_{???}}.$$

Resumen: los productos λa y $\boxed{}$ son iguales.

6. Transformamos la fórmula para *u*. Combinamos los resultados de ejercicios anteriores. Escribimos el vector $u \coloneqq \lambda a$ (la proyección ortogonal de v sobre a) como

$$u = \lambda a = \boxed{\quad}\ \boxed{\quad}.$$

Ahora sustituimos la fórmula para λ:

$$u = \boxed{\quad}\ \left(\boxed{\qquad\quad}\right).$$

Verificamos que el último producto de tres factores está bien definido como un producto de matrices:

$$\underbrace{a}_{???\times???}\ \underbrace{a^\top}_{???\times???}\ \underbrace{\boxed{\qquad}}_{???\times???}.$$

Ahora asociamos este producto de otra manera:

$$u = \left(\boxed{\quad}\ \boxed{\quad}\right) v. \tag{4}$$

El resultado se puede escribir en la forma $u = P_a v$, donde

$$P_a \coloneqq \boxed{\quad}\ \boxed{\quad}.$$

Identificamos la naturaleza del producto $aa^\top$:

- $aa^\top$ es el producto de un escalar por un vector;
- $aa^\top$ es el producto diádico de dos vectores;
- $aa^\top$ el producto punto de dos vectores, o sea $\|a\|^2$.

Por eso el tamaño de P_a es $\boxed{\quad} \times \boxed{\quad}$.

El operador lineal $v \mapsto P_a v$ es el operador de proyección ortogonal sobre a,
y P_a es la matriz de la proyección ortogonal sobre a.

Propiedades algebraicas de la matriz $\boldsymbol{P_a}$

7. Propiedad idempotente de la matriz $\boldsymbol{P_a}$.
Recordamos que $a^\top a = \boxed{\quad}$. Usando esta condición y la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices, calculemos el cuadrado de la matriz P_a:

$$\begin{aligned} P_a^2 = P_a P_a &= \left(\boxed{\quad}\ \boxed{\quad} \right) \left(\boxed{\quad}\ \boxed{\quad} \right) \\ &= \boxed{\quad} \left(\boxed{\quad}\ \boxed{\quad} \right) \boxed{\quad} = \boxed{\quad}\ \boxed{\quad} = \boxed{\quad}. \end{aligned}$$

Resumen: $\quad P_a^2 = \boxed{\quad}$.

8. Propiedad simétrica de la matriz $\boldsymbol{P_a}$. Recordemos algunas propiedades de la operación de transposición de matrices:

$$(AB)^\top = \boxed{\qquad\quad}, \qquad (A^\top)^\top = \boxed{\quad}.$$

Calculemos la matriz transpuesta de la matriz P_a:

$$P_a^\top = \left(a\, a^\top\right)^\top = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \boxed{\quad}.$$

9. La imagen del vector $\boldsymbol{a}$ bajo el operador $\boldsymbol{P_a}$. Calculemos $P_a a$:

$$P_a a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \boxed{\quad}.$$

10. ¿Qué pasa con los múltiplos del vector $\boldsymbol{a}$ al proyectarlos sobre $\boldsymbol{a}$?.
Sean $\mu \in \mathbb{R}$, $b = \mu a$. Aplicamos el resultado del ejercicio anterior y la propiedad homogénea de la multilicación de matrices:

$$P_a b = P_a\left(\boxed{\quad}\ \boxed{\quad} \right) = \boxed{\quad} P_a \boxed{\quad} = \boxed{\quad}\ \boxed{\quad} = \boxed{\quad}.$$

Conclusión: si $b \in \ell(a)$, entonces $P_a b = \boxed{\quad}$. En otras palabras,
los $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ del vector a son puntos fijos (puntos inmovibles) del operador P_a.

Problemas más avanzados

11. Problema. Encuentre la imagen (el espacio columna) y el núcleo (el espacio nulo) de la matriz P_a. Se pueden adivinar las respuestas, pero luego hay que escribir las demostraciones completas (demostrar la igualdad de conjuntos).

12. Problema. ¿Cuál es la dimensión del espacio $\ker P_a$? Supongamos que $b_1, \ldots, b_{???}$ es una base ortonormal del espacio $\ker P_a$. Muestre que $a, b_1, \ldots, b_{???}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. ¿Cuál es la matriz asociada al operador P_a con respecto a esta base nueva?

13. Problema. Encuentre los valores propios de P_a y explique cómo construir una base de $\mathbb{R}^n$ que consista de vectores propios de P_a.