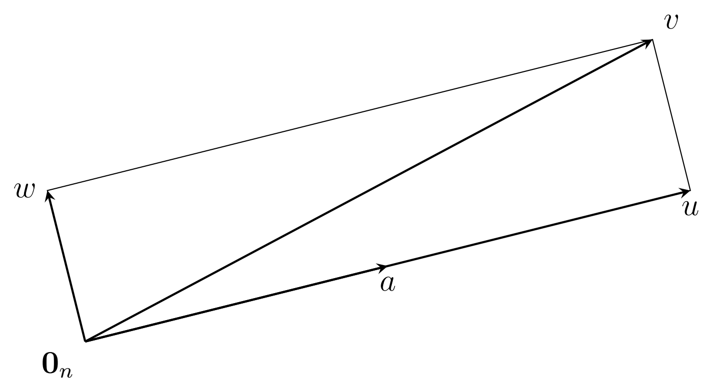
Proyección ortogonal sobre una recta

Objetivos. Definir el operador lineal de proyección ortogonal sobre la recta definida por un vector, calcular su matriz asociada y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Matrices ortogonales, producto punto en $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades.

1. Proposición sobre la proyección ortogonal de un vector sobre la recta generada por un vector no nulo. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un único par de vectores $(u, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$v = u + w, \qquad u \in \ell(a), \qquad w \perp a. \tag{1}$$



Demostración. Unicidad. Supongamos que u y w tienen propiedades (1). Como $u \in \ell(a)$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda a$. Luego de la igualdad $v = u + w$ obtenemos $w = v - \lambda a$. La condición $w \perp a$ nos da

$$0 = \langle a, v - \lambda a\rangle = \langle a, v\rangle - \lambda \langle a, a\rangle,$$

de donde $\lambda = \frac{\langle a,v\rangle}{\langle a,a\rangle}$. Resumimos: de las condiciones (1) hemos deducido que u y w se determinan de manera única porque se expresan a través de a y v por las fórmulas

$$u = \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a, \qquad w = v - \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a. \tag{2}$$

Existencia. Definimos u y w mediante las fórmulas (2). Verifiquemos que u y w satisfacen las propiedades (1). En realidad, $u + w = v$, $u \in \ell(a)$, y

$$\langle a, w\rangle = \langle a, v\rangle - \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\, \langle a, v\rangle = 0. \qquad \square$$

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$(a^\top b)c = c(a^\top b) = (ca^\top)b.$$

3. Definición del operador $\boldsymbol{P_a}$. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Para cada $v \in \mathbb{R}^n$ definimos $P_a(v)$ como el vector u de la Proposición 1:

$$P_a(v) \coloneqq \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a. \tag{3}$$

De la fórmula (3) se ve que P_a es un operador lineal. Notamos que $P_a(v)$ se puede escribir en la forma

$$P_a(v) = \frac{1}{\|a\|^2}\,(a^\top v)a = \frac{1}{\|a\|^2}\,a(a^\top v) = \frac{1}{\|a\|^2}(aa^\top)v = \left(\frac{1}{\|a\|^2}aa^\top\right)v.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{\|a\|^2}aa^\top$ es la matriz asociada al operador P_a con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Identificamos esta matriz con el operador P_a:

$$P_a = \frac{1}{\|a\|^2}aa^\top.$$

Las siguientes proposiciones se demuestran fácilmente.

4. Proposición (propiedades de la matriz $\boldsymbol{P_a}$). Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Entonces:

- P_a es idempotente: $P_a^2 = P_a$.
- P_a es simétrica: $P_a^\top = P_a$.
- $P_a a = a$.

5. Proposición (propiedades de la proyección complementaria $\boldsymbol{I_n - P_a}$). Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Pongamos $Q_a \coloneqq I_n - P_a$. Entonces la matriz Q_a tambiés es idempotente y simétrica:

$$Q_a^2 = Q_a, \qquad Q_a^\top = Q_a.$$

Más aún,

$$P_a Q_a = \mathbf{0}_{n\times n}$$

y

$$Q_a a = \mathbf{0}_n.$$

6. La matriz $\boldsymbol{P_a}$ no se cambia al multiplcar $\boldsymbol{a}$ por un escalar no nulo. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces $P_{\lambda a} = P_a$.

7. La imagen del operador $\boldsymbol{P_a}$ es $\boldsymbol{\ell(a)}$. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Entonces:

- Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $P_a(x) \in \ell(a)$.
- Para todo $x \in \ell(a)$, $P_a(x) = x$ y por lo tanto $x \in \operatorname{im}(P_a)$.

Resumen: $\operatorname{im}(P_a) = \ell(a)$.

8. El núcleo del operador $\boldsymbol{P_a}$ es $\boldsymbol{\{a\}^\perp}$.

- Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, si $x \perp a$, entonces $P_a(x) = \mathbf{0}_n$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, si $P_a(x) = \mathbf{0}_n$, entonces $x \perp a$.

Resumen: $\ker(P_a) = \{a\}^\perp$.

9. Relación entre la imagen y el núcleo de las proyecciones complementarias $\boldsymbol{P_a}$ y $\boldsymbol{Q_a}$. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Entonces

$$\operatorname{im}(P_a) = \ker(Q_a), \qquad \ker(P_a) = \operatorname{im}(Q_a).$$

10. Tarea adicional. Sea $n \geq 2$ y sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Usando los resultados anteriores adivine dos valores propios de P_a. Para cada uno de estos dos valores propios λ halle el subespacio propio $\ker(\lambda I_n - P_a)$ y determine su dimensión. Muestre que P_a no tiene otros valores propios. Describa una base ortonormal del espacio $\mathbb{R}^n$ cuyos elementos sean vectores propios del operador P_a.