Motivación de la definición del producto de matrices (un tema del curso “Álgebra Lineal Numérica”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

5 de marzo de 2021

Objetivos

Recordaremos la definición del producto Ax,
donde $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostraremos el siguiente teorema.

Teorema

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$.
Entonces existe una única matriz C tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Definición del producto de una matriz por un vector, repaso

Dados $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Ax := \left[\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} x_k \right]_{j=1}^{m}.$$

En otras palabras, por definición,

$$Ax \in \mathbb{R}^m,$$

y para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} x_k.$$

El producto de una matriz por un vector como una combinación lineal de las columnas de la matriz, repaso

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k A_{*,k}.$$

La delta de Kronecker, repaso

$\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$,

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

La propiedad principal de la delta de Kronecker, repaso

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, n\}$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} =$$

La propiedad principal de la delta de Kronecker, repaso

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, n\}$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} = x_q.$$

La propiedad principal de la delta de Kronecker, repaso

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, n\}$*. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} = x_q.$$

Demostración.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} =$$

La propiedad principal de la delta de Kronecker, repaso

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, n\}$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} = x_q.$$

Demostración.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} = x_q \delta_{q,q} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{q\}} x_k \delta_{k,q} =$$

La propiedad principal de la delta de Kronecker, repaso

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, n\}$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} = x_q.$$

Demostración.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} = x_q \delta_{q,q} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{q\}} x_k \delta_{k,q} = x_q.$$

La propiedad principal de la delta de Kronecker, repaso

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $q \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} = x_q.$$

Demostración.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,q} = x_q \delta_{q,q} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{q\}} x_k \delta_{k,q} = x_q.$$

Más aún, la fórmula se cumple, si $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de un espacio vectorial.

Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

$$e_q^{(n)} := \left[\delta_{q,k}\right]_{k=1}^{n}.$$

Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

$$e_q^{(n)} := \left[\delta_{q,k}\right]_{k=1}^{n}.$$

En otras palabras, $e_q^{(n)} \in \mathbb{R}^n$, y para cada k en $\{1, \ldots, n\}$,

$$(e_q^{(n)})_k = \delta_{k,q}.$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1,\ldots,m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Primera demostración.

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1,\ldots,m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Primera demostración.

Ambos productos $Ae_q^{(n)}$ y $A_{*,q}$ son elementos de

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Primera demostración.

Ambos productos $Ae_q^{(n)}$ y $A_{*,q}$ son elementos de $\mathbb{R}^m$.

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1,\ldots,m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Primera demostración.

Ambos productos $Ae_q^{(n)}$ y $A_{*,q}$ son elementos de $\mathbb{R}^m$.

Para cada j en $\{1,\ldots,m\}$,

$$(Ae_q^{(n)})_j =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1,\ldots,m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Primera demostración.

Ambos productos $Ae_q^{(n)}$ y $A_{*,q}$ son elementos de $\mathbb{R}^m$.

Para cada j en $\{1,\ldots,m\}$,

$$(Ae_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(e_q^{(n)})_k =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1,\ldots,m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Primera demostración.

Ambos productos $Ae_q^{(n)}$ y $A_{*,q}$ son elementos de $\mathbb{R}^m$.

Para cada j en $\{1,\ldots,m\}$,

$$(Ae_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(e_q^{(n)})_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}\delta_{k,q} =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Primera demostración.

Ambos productos $Ae_q^{(n)}$ y $A_{*,q}$ son elementos de $\mathbb{R}^m$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$(Ae_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(e_q^{(n)})_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}\delta_{k,q} = A_{q,k} =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $q \in \{1,\ldots,m\}$. Entonces

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Primera demostración.

Ambos productos $Ae_q^{(n)}$ y $A_{*,q}$ son elementos de $\mathbb{R}^m$.

Para cada j en $\{1,\ldots,m\}$,

$$(Ae_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(e_q^{(n)})_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}\delta_{k,q} = A_{q,k} = (A_{*,k})_q.$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1,\ldots,m\}$*. Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Segunda demostración.

$$Ae_q^{(n)} =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Segunda demostración.

$$Ae_q^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} A_{*,k}(e_q^{(n)})_k =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Segunda demostración.

$$Ae_q^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} A_{*,k}(e_q^{(n)})_k = \sum_{k=1}^{n} A_{*,k}\delta_{k,q} =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$Ae_q^{(n)} = A_{*,q}.$$

Segunda demostración.

$$Ae_q^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} A_{*,k}(e_q^{(n)})_k = \sum_{k=1}^{n} A_{*,k}\delta_{k,q} = A_{*,q}.$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

En particular, hemos mostrado que

$$(Ae_q^{(n)})_j =$$

El producto de una matriz por un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, repaso

En particular, hemos mostrado que

$$(Ae_q^{(n)})_j = A_{j,q}.$$

Teorema

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$.

Entonces existe una única matriz C *tal que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Unicidad, el tamaño de C

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Suponemos que C es una matriz tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Unicidad, el tamaño de C

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Suponemos que C es una matriz tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Para que el producto Cx esté definido, C debe tener

Unicidad, el tamaño de C

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Suponemos que C es una matriz tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Para que el producto Cx esté definido, C debe tener p columnas.

Unicidad, el tamaño de C

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Suponemos que C es una matriz tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Para que el producto Cx esté definido, C debe tener p columnas.

El producto $A(Bx)$ tiene

Unicidad, el tamaño de C

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Suponemos que C es una matriz tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Para que el producto Cx esté definido, C debe tener p columnas.

El producto $A(Bx)$ tiene m renglones.

Unicidad, el tamaño de C

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Suponemos que C es una matriz tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Para que el producto Cx esté definido, C debe tener p columnas.

El producto $A(Bx)$ tiene m renglones.

Por lo tanto, C debe tener m renglones.

Unicidad, el tamaño de C

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Suponemos que C es una matriz tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Para que el producto Cx esté definido, C debe tener p columnas.

El producto $A(Bx)$ tiene m renglones.

Por lo tanto, C debe tener m renglones.

Resumen. $C \in$

Unicidad, el tamaño de C

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Suponemos que C es una matriz tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Para que el producto Cx esté definido, C debe tener p columnas.

El producto $A(Bx)$ tiene m renglones.

Por lo tanto, C debe tener m renglones.

Resumen. $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Elegimos $j \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En la igualdad $Cx = A(Bx)$ ponemos $x = e_q^{(n)}$, brevemente $x = e_q$.

Consideremos la j-ésima componente.

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Elegimos $j \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En la igualdad $Cx = A(Bx)$ ponemos $x = e_q^{(n)}$, brevemente $x = e_q$.

Consideremos la j-ésima componente.

Por un lado,

$$(Ce_q^{(n)})_j =$$

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Elegimos $j \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En la igualdad $Cx = A(Bx)$ ponemos $x = e_q^{(n)}$, brevemente $x = e_q$.

Consideremos la j-ésima componente.

Por un lado,

$$(Ce_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} C_{j,k} \delta_{k,q} =$$

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Elegimos $j \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En la igualdad $Cx = A(Bx)$ ponemos $x = e_q^{(n)}$, brevemente $x = e_q$.

Consideremos la j-ésima componente.

Por un lado,

$$(Ce_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} C_{j,k}\delta_{k,q} = C_{j,q}.$$

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Elegimos $j \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En la igualdad $Cx = A(Bx)$ ponemos $x = e_q^{(n)}$, brevemente $x = e_q$.

Consideremos la j-ésima componente.

Por un lado,

$$(Ce_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} C_{j,k}\delta_{k,q} = C_{j,q}.$$

Por otro lado,

$$\big(A(Be_q)\big)_j =$$

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Elegimos $j \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En la igualdad $Cx = A(Bx)$ ponemos $x = e_q^{(n)}$, brevemente $x = e_q$.

Consideremos la j-ésima componente.

Por un lado,

$$(Ce_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} C_{j,k}\delta_{k,q} = C_{j,q}.$$

Por otro lado,

$$\big(A(Be_q)\big)_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(Be_q)_k =$$

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Elegimos $j \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En la igualdad $Cx = A(Bx)$ ponemos $x = e_q^{(n)}$, brevemente $x = e_q$.

Consideremos la j-ésima componente.

Por un lado,

$$(Ce_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} C_{j,k}\delta_{k,q} = C_{j,q}.$$

Por otro lado,

$$\big(A(Be_q)\big)_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(Be_q)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}B_{k,q}.$$

Unicidad, las componentes de C

Estamos suponiendo que C es una matriz tal que para cada x en $\mathbb{R}^p$ se cumple $Cx = A(Bx)$.

Elegimos $j \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En la igualdad $Cx = A(Bx)$ ponemos $x = e_q^{(n)}$, brevemente $x = e_q$.

Consideremos la j-ésima componente.

Por un lado,

$$(Ce_q^{(n)})_j = \sum_{k=1}^{n} C_{j,k}\delta_{k,q} = C_{j,q}.$$

Por otro lado,

$$\big(A(Be_q)\big)_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(Be_q)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}B_{k,q}.$$

Resumen. $C_{j,q}$ debe ser igual a la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{j,k}B_{k,q}$.

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$(A(Bx))_j =$$

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$(A(Bx))_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} (Bx)_k =$$

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$(A(Bx))_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} (Bx)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \sum_{q=1}^{p} B_{k,q} x_q =$$

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1, \dots, m\}$ tenemos

$$(A(Bx))_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} (Bx)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \sum_{q=1}^{p} B_{k,q} x_q = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{p} A_{j,k} B_{k,q} x_q.$$

Por otro lado,

$$(Cx)_j =$$

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$(A(Bx))_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(Bx)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \sum_{q=1}^{p} B_{k,q} x_q = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{p} A_{j,k} B_{k,q} x_q.$$

Por otro lado,

$$(Cx)_j = \sum_{q=1}^{p} C_{j,q} x_q =$$

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$(A(Bx))_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(Bx)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \sum_{q=1}^{p} B_{k,q} x_q = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{p} A_{j,k} B_{k,q} x_q.$$

Por otro lado,

$$(Cx)_j = \sum_{q=1}^{p} C_{j,q} x_q = \sum_{q=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q} \right) x_q =$$

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1,\ldots,m\}$ tenemos

$$(A(Bx))_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(Bx)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \sum_{q=1}^{p} B_{k,q} x_q = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{p} A_{j,k} B_{k,q} x_q.$$

Por otro lado,

$$(Cx)_j = \sum_{q=1}^{p} C_{j,q} x_q = \sum_{q=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q} \right) x_q = \sum_{q=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q} x_q =$$

Existencia

Definimos $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$C_{j,q} := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostremos que $Cx = A(Bx)$. En efecto, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$(A(Bx))_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(Bx)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \sum_{q=1}^{p} B_{k,q} x_q = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{p} A_{j,k} B_{k,q} x_q.$$

Por otro lado,

$$(Cx)_j = \sum_{q=1}^{p} C_{j,q} x_q = \sum_{q=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q} \right) x_q = \sum_{q=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q} x_q = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{p} A_{j,k} B_{k,q} x_q.$$

Resumen

Dadas dos matrices, A en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y B en $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, existe una única matriz C tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad Cx = A(Bx).$$

Esta matriz C se define por la regla

$$C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad C_{j,q} = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q}.$$

En otras palabras,

$$C = \left[\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,q} \right]_{j=1}^{m}.$$

Esta matriz se llama el producto de las matrices A y B.

Otra forma de hablar

A cada matriz A de clase $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se le asocia la transformación lineal

$$T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$T_A(x) := Ax \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Otra forma de hablar

A cada matriz A de clase $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se le asocia la transformación lineal

$$T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$T_A(x) := Ax \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dadas A en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y B en $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, la matriz AB se define de tal manera que

$$T_{AB} = T_A \circ T_B.$$

Otra forma de hablar

A cada matriz A de clase $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se le asocia la transformación lineal

$$T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$T_A(x) := Ax \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dadas A en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y B en $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, la matriz AB se define de tal manera que

$$T_{AB} = T_A \circ T_B.$$

En otras palabras,

el producto de matrices corresponde a la composición de las transformaciones lineales.