Minimización de una forma cuadrática sobre una recta

Objetivos. Dada una forma cuadrática positiva definida, encontrar su mínimo sobre una recta dada.

1. Restricción de una forma cuadrática a una recta. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica estrictamente positiva definida, y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Definamos la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - x^\top b.$$

Luego fijemos un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y un vector $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, y consideremos la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(\alpha) := f(x + \alpha p).$$

2. Minimización de una forma cuadrática sobre una recta. Sean A, b y g los mismos que en el razonamiento anterior. Entonces

$$g'(\alpha) = \alpha p^\top Ap - p^\top(b - Ax). \tag{1}$$

La condición que A es estrictamente positiva definida implica que $p^\top Ap > 0$. Por consecuencia, la función g tiene un mínimo global estricto en el punto

$$\frac{p^\top(b - Ax)}{p^\top Ap}. \tag{2}$$

Demostración de la fórmula (1). Método I. Usar la fórmula para la derivada direccional:

$$g'(\alpha) = p^\top\,(\operatorname{grad} f)(x + \alpha p).$$

Método II. Primero calcular la función g:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \frac{1}{2}(x + \alpha p)^\top A(x + \alpha p) - (x + \alpha p)^\top b \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2 p^\top Ap + \alpha\,\big(p^\top Ax - p^\top b\big) + \frac{1}{2}x^\top Ax - x^\top b. \end{aligned}$$

Luego sacar la derivada de g:

$$g'(\alpha) = \alpha p^\top Ap - p^\top(b - Ax). \qquad \square$$