Normas matriciales inducidas por normas vectoriales

Objetivos. Estudiar la norma matricial induciada por una norma vectorial.

1. Norma en un espacio vectorial real (repaso). Sea V un espacio vectorial real. Una función $\nu\colon V \to \mathbb{R}$ se llama *norma* si cumple con las siguientes propiedades:

1. Desigualdad triangular:
$$\forall a, b, c \in V \qquad \nu(a+b) \le \nu(a) + \nu(b).$$
2. $\nu(\lambda a) = |\lambda|\,\nu(a)$ para cualesquiera $a \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $N(\mathbf{0}) = 0$.
4. Si $a \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces $\nu(a) > 0$.

Por simplicidad sólo trabajamos con matrices cuadradas.

2. Definición (la norma matricial inducida por una norma vectorial). Sea ν una norma en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Entonces la *norma matricial* $\nu_{\mathrm{matr}}\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *inducida* por ν se define de la siguiente manera:

$$\nu_{\mathrm{matr}}(A) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)}.$$

3. Proposición (varias fórmulas para la norma matricial). Sea $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una norma y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces los siguientes números son iguales:

$$C_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)};$$

$$C_2 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n\colon \\ \nu(x)=1}} \nu(Ax);$$

$$C_3 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n\colon \\ \nu(x)\le 1}} \nu(Ax).$$

Además C_1 es el mínimo de los números $C \ge 0$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \nu(Ax) \le C\,\nu(x).$$

4. Proposición (propiedad principal de la norma matricial). Sea $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \nu(Ax) \le \nu_{\mathrm{matr}}(A)\nu(x).$$

Más aún, $\nu_{\mathrm{matr}}(A)$ es el número mínimo con esta propiedad, es decir, el elemento mínimo del conjunto

$$\big\{C \ge 0\colon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \nu(Ax) \le C\,\nu(x)\big\}.$$

5. Propiedad submultiplicativa de la norma matricial. La función ν_{matr} es una norma en el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en el sentido de la definición 1. Además, esta norma cumple con la propiedad *submultiplicativa*:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \nu_{\mathrm{matr}}(AB) \leq \nu_{\mathrm{matr}}(A)\nu_{\mathrm{matr}}(B).$$

6. Proposición (el supremo en la definición de la norma matricial se alcanza). Sea $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una norma. Entonces existe un vector $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que

$$\nu(Ax) = \nu_{\mathrm{matr}}(A)\nu(x).$$

Esquema de demostración. Denotamos por S^{n-1} a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$:

$$S^{n-1} \coloneqq \big\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\|_2 = 1\big\}.$$

Entonces:

1. Existe un $C' > 0$ tal que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \nu(x) \leq C'\|x\|_2.$$

2. La función ν es Lipschitz continua:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |\nu(x) - \nu(y)| \leq C'\|x - y\|_2.$$

3. Existe un $C'' > 0$ tal que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \nu(Ax) \leq C''\|x\|_2.$$

4. La función $x \mapsto \nu(Ax)$ es Lipschitz continua:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |\nu(Ax) - \nu(Ay)| \leq C''\,\|x - y\|_2.$$

5. La función $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula es continua:
$$f(x) \coloneqq \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)}.$$

6. f alcanza su máximo en S^{n-1}.

7. El valor máximo de la función f en S^{n-1} coincide con $\nu_{\mathrm{matr}}(A)$. $\square$

7. Normas matriciales inducidas por las normas vectoriales 1, 2, ∞. Para cada $p \in [1, +\infty]$ denotemos por $\|A\|_{\mathrm{matr},p}$ a la norma matricial indicida por la norma vectorial $\|\cdot\|_p$:

$$\|A\|_{\mathrm{matr},p} \coloneqq \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}_n\}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

A continuación vamos a demostrar fórmulas para los casos $p = 1, 2, \infty$:

$$\|A\|_{\mathrm{matr},1} = \max_{1 \le k \le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{j,k}|,$$

$$\|A\|_{\mathrm{matr},2} = s_1(A),$$

$$\|A\|_{\mathrm{matr},\infty} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}|.$$

Aquí $s_1(A)$ es el máximo valor singular de la matriz A.