La norma matricial inducida por la norma–máximo

Estos apuntes están escritos por Maria de los Angeles Isidro Pérez y Egor Maximenko.

Objetivos. Repasar el concepto de la norma matricial inducida por una norma vectorial. Deducir una fórmula para la norma matricial inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Requisitos. Normas en $\mathbb{R}^n$, norma-máximo (norma-supremo), producto de una matriz por un vector.

Aplicaciones. Análisis de convergencia de métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales (incluso los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel), análisis del concepto de matriz diagonal dominante, número de condición (o número de acondicionamiento) de una matriz.

En estos apuntes denotamos por $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$ la norma matricial de la matriz A asociada a la norma vectorial $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|A\|_{\mathrm{matr},\infty} \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}_n\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}. \tag{1}$$

Otra fórmula equivalente:

$$\|A\|_{\mathrm{matr},\infty} \coloneqq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ \|x\|_\infty\le 1}} \|Ax\|_\infty. \tag{2}$$

Por lo común en vez de $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty}$ se escribe simplemente $\|A\|_\infty$.

1. Teorema (fórmula para la norma matricial inducida por la norma-máximo). Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$\|A\|_{\mathrm{matr},\infty} = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^n |A_{j,k}|. \tag{3}$$

En otras palabras,

$$\|A\|_{\mathrm{matr},\infty} = \max_{1\le j\le n} \|A_{j,*}\|_1, \tag{4}$$

donde $\|A_{j,*}\|_1$ es la 1-norma del j-ésimo renglón de A.

Demostración. Denotemos el lado derecho de (3) por C:

$$C \coloneqq \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^n |A_{j,k}|. \tag{5}$$

1. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_\infty \le 1$. Entonces

$$|(Ax)_j| = \left| \sum_{k=1}^n A_{j,k} x_k \right| \le \sum_{k=1}^n |A_{j,k}|\,|x_k| \le \|x\|_\infty \sum_{k=1}^n |A_{j,k}| \le C. \tag{6}$$

2. Sea p el índice tal que el máximo en (5) se alcanza con $j = p$:

$$\sum_{k=1}^n |A_{p,k}| = C.$$

Consideremos el vector $y \in \mathbb{R}^n$ cuya k-ésima componente es

$$\operatorname{sgn}(A_{p,k}).$$

En otras palabras, definimos x por la fórmula

$$y = \left[\ \operatorname{sgn}(A_{p,k})\ \right]_{k=1}^n.$$

Entonces $\|y\|_\infty \le 1$ y

$$|(Ay)_p| = \sum_{k=1}^n A_{p,k} \operatorname{sgn}(A_{p,k}) = \sum_{k=1}^n |A_{p,k}| = C,$$

así que $\|Ay\|_\infty \ge C$. Usando la fórmula (2) concluimos que $\|A\|_\infty = C$. $\square$

2. Ejemplo numérico. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\|A_{1,*}\|_1 = 7 + 5 = 12, \qquad \|A_{2,*}\|_1 = 8 + 9 = 17,$$

por eso

$$\|A\|_\infty = \max\{12, 17\} = 17.$$

3. Sea A una matriz diagonal:

$$A = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Entonces

$$\|A\|_\infty = \max\{|d_1|, |d_2|, \ldots, |d_n|\}.$$