La norma matricial inducida por la 1-norma

Objetivos. Deducir una fórmula para la norma matricial inducida por la norma $\|\cdot\|_1$.

Requisitos. Normas en $\mathbb{R}^n$, norma $\|\cdot\|_1$ (1-norma, norma de taxi, Manhattan-norma), producto de una matriz por un vector.

Aplicaciones. Análisis de convergencia de métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales (incluso los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel), análisis del concepto de matriz diagonal dominante, número de condición (o número de acondicionamiento) de una matriz.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, denotamos por $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$ a la norma matricial de la matriz A asociada a la norma vectorial $\|\cdot\|_1$:

$$\|A\|_{\mathrm{matr},1} \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}_n\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}. \tag{1}$$

Otra fórmula equivalente:

$$\|A\|_{\mathrm{matr},1} \coloneqq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n:\\ \|x\|_1\le 1}} \|Ax\|_1. \tag{2}$$

Por lo común en vez de $\|A\|_{\mathrm{matr},1}$ se escribe simplemente $\|A\|_1$.

1. Teorema (fórmula para la norma matricial inducida por la 1-norma vectorial). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$\|A\|_1 = \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^n |A_{j,k}|. \tag{3}$$

Demostración. Denotemos el lado derecho de (3) por C. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_1 \le 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j\right| \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |A_{i,j}|\,|x_j| \\ &\le \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|\right)|x_j| \le C\sum_{j=1}^n |x_j| = C\|x\|_1.\end{aligned}$$

Vamos a construir un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $\|Ax\|_1 = C$. Denotemos por q al índice de la máxima suma en (3):

$$C = \sum_{i=1}^n |A_{i,q}|,$$

y consideremos el vector

$$e_q = \left[\delta_{j,q}\right]_{j=1}^{n}.$$

Entonces $\|e_q\|_1 = 1$ y

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\delta_{j,q} \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_{i,q}| = C. \qquad \square$$

2. Ejemplo numérico. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\|A_{*,1}\|_1 = 7 + 8 = 15, \qquad \|A_{*,2}\|_1 = 5 + 9 = 14,$$

por eso

$$\|A\|_{\mathrm{matr},1} = \max\{15, 14\} = 15.$$

3. Sea A una matriz diagonal:

$$A = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Entonces

$$\|A\|_{\mathrm{matr},1} = \max\{|d_1|, |d_2|, \ldots, |d_n|\}.$$