Criterios geométricos de matrices reales ortogonales (un tema del curso “Álgebra Lineal Numérica”)

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

16 de abril de 2021

Criterio de matrices ortogonales en términos de renglones y columnas

Proposición

Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $Q^\top Q = I_n$;

(b) $QQ^\top = I_n$;

(c) *las columnas de Q forman una lista ortonormal en $\mathbb{R}^n$;*

(d) *los renglones de Q forman una lista ortonormal en $\mathbb{R}^n$.*

Una matriz Q de clase $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llama ortogonal si $Q^\top Q = I_n$ y $QQ^\top = I_n$.

La norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ y el producto interno en $\mathbb{R}^n$: repaso

La norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, denotada por $\|\cdot\|_2$ o simplemente por $\|\cdot\|$, se puede definir en términos del producto punto:

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}.$$

La norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ y el producto interno en $\mathbb{R}^n$: repaso

La norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, denotada por $\|\cdot\|_2$ o simplemente por $\|\cdot\|$, se puede definir en términos del producto punto:

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}.$$

Proposición (identidades de polarización reales)

Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2\Big),$$
$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}\Big(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\Big).$$

La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Proposición

Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\|a\| = d(a, 0_n).$$

La forma bilineal asociada a una matriz, repaso breve

Dada A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definimos $f_A\colon (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Otra forma equivalente:

$$f_A(x, y) = y^\top Ax.$$

La forma bilineal asociada a una matriz, repaso breve

Dada A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definimos $f_A\colon (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Otra forma equivalente:

$$f_A(x, y) = y^\top Ax.$$

Ejercicio. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que f_A es bilineal:

$$f_A(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\, f_A(x, z) + \mu\, f_A(y, z),$$
$$f_A(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\, f_A(x, y) + \mu\, f_A(x, z).$$

La forma bilineal asociada a una matriz, repaso breve

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

La forma bilineal asociada a una matriz, repaso breve

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Ejercicio. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$f_A(x, y) = \sum_{j,k=1}^{n} A_{j,k} x_j x_k.$$

Matrices y formas bilineales

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Matrices y formas bilineales

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Ejercicio. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Calcular

$$f_A(e_r, e_s).$$

Matrices y formas bilineales

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Ejercicio. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $r, s \in \{1, \dots, n\}$. Calcular

$$f_A(e_r, e_s).$$

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tales que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle Ax, y \rangle = \langle Bx, y \rangle.$$

Entonces $A = B$.

La matriz transpuesta como el operador adjunto, repaso

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle.$$

La matriz transpuesta como el operador adjunto, repaso

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle.$$

Demostración.

$$\langle x, A^\top y \rangle = (A^\top y)^\top x = (y^\top (A^\top)^\top) x = (y^\top A) x = y^\top (Ax) = \langle Ax, y \rangle. \qquad \square$$

La matriz transpuesta como el operador adjunto, repaso

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle.$$

Demostración.

$$\langle x, A^\top y \rangle = (A^\top y)^\top x = (y^\top (A^\top)^\top) x = (y^\top A) x = y^\top (Ax) = \langle Ax, y \rangle. \qquad \square$$

Otra forma equivalente de esta propiedad:

$$\langle B^\top x, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

Proposición (criterio geométrico de matrices ortogonales)

Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $A^\top A = I_n$.

(b) *A preserva el producto interno canónico:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(c) *A preserva la norma euclidiana:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|Ax\| = \|x\|.$$

(d) *A preserva la distancia euclidiana:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad d(Ax, Ay) = d(x, y).$$

Una parte de demostración: (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Una parte de demostración: (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

En otras palabras,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle A^\top Ax, y \rangle = \langle I_n x, y \rangle.$$

Una parte de demostración: (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle.$$

En otras palabras,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle A^\top Ax, y\rangle = \langle I_n x, y\rangle.$$

Las formas bilineales $f_{A^\top A}$ y f_{I_n} son iguales. Por lo tanto,

$$A^\top A = I_n.$$

Una parte de demostración: (d)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad d(Ax, Ay) = d(x, y).$$

En particular, con $y = 0_n$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad d(Ax, 0_n) = d(x, 0_n).$$

Otra forma equivalente:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|Ax\| = \|x\|.$$

Ejercicio. Sea $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$Qx = b.$$

Recetas para generar matrices ortogonales

Se recomienda ejecutar los siguientes comandos en Matlab o GNU Octave.

Receta 1: ortogonalización de una lista de vectores aleatoria.

```
n = 3;
A = randn(n);
[Q, R] = qr(A);
Q' * Q
```

Recetas para generar matrices ortogonales

Se recomienda ejecutar los siguientes comandos en Matlab o GNU Octave.

Receta 2: los vectores propios de una matriz simétrica aleatoria.

```
n = 3;
A = randn(n);
B = A + A';
[V, D] = eig(B);
V' * V
```