Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica. Examen parcial II. Variante α.

Descomposición QR y el problema de mínimos cuadrados. Métodos iterativos de Jacobi y de Gauss–Seidel.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *25 %.*
En algún lenguaje de programación escribir una función que resuelva el **problema de factorización QR** (completa o reducida) usando las **reflexiones de Householder** o las **rotaciones de Givens**. Suponer que el rango de la matriz dada coincide con el número de columnas. Calcular la complejidad en el caso de matrices cuadradas (contar solamente las operaciones de multiplicación y división).

Problema 2. *15 %.*
Sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre alguna de las siguientes dos afirmaciones:

- Sea u la proyección ortogonal de x sobre S. Entonces u es el punto de S **más cercano** a x, esto es, $\|u - x\| < \|y - x\|$ para cada $y \in S \setminus \{u\}$.
- Sea u el punto de S más cercano a x. Entonces $x - u \perp S$. (En este inciso no usar fórmulas para la proyección ortogonal.)

Problema 3. *20 %.*
Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $\mathrm{r}(A) = m \leqslant n$, y sea $b \in \mathbb{R}^n$.

I. Demostrar que el **sistema de ecuaciones normales** $A^\top A x = A^\top b$ tiene una única solución. La denotemos por u.

II. Demostrar u es el punto mínimo global estricto de la función $f(x) = \|Ax - b\|^2$.

Problema 4. *20 %.*
En algún lenguaje de programación escribir el **algoritmo de Gauss–Seidel** en forma matricial. Analizar la complejidad de una iteración (un paso) de este algoritmo (es suficiente calcular el número de operaciones de multiplicación y división que se realizan en una iteración).

Problema 5. *20 %.*
Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Enunciar y demostrar la fórmula para la **norma matricial** $\|A\|_1$. Demostrar la **convergencia del método de Jacobi** para una matriz estrictamente diagonal dominante por columnas. Sugerencia: mostrar que el método de Jacobi corresponde a la evaluación iterada de una función contractiva en el espacio $\mathbb{R}^n$.